E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Analisis Nilai Klaim dengan Biaya Menggunakan Model *Black-Scholes*

Nadia[1*]

[1] Universitas Nurul Huda, Indonesia
* Email: nadia@unuha.ac.id

Abstrak

Model yang populer digunakan untuk penentuan nilai produk derivatif keuangan seperti opsi put dan call adalah model Black-Scholes. Namun, aplikasi model Black-Scholes tidak terbatas hanya pada penentuan nilai opsi. Model ini juga dapat diterapkan dalam penentuan nilai klaim lainnya yang memiliki karakteristik serupa. Pada penelitian ini, nilai klaim ditentukan dengan memperhatikan payoff yang ditambahkan dengan biaya. Penghitungan dilakukan secara analitis, kemudian dilakukan analisis sensitivitas. Hasil analisis sensitifitas menunjukkan bahwa nilai klaim berbanding lurus dengan penambahan biaya.

Kata kunci: *Model Black-Scholes, Harga Klaim, Penilaian Analitik*

PENDAHULUAN

Produk derivatif telah menjadi salah satu instrumen yang sangat diminati dalam pasar keuangan modern. Keberadaannya memungkinkan para pelaku pasar untuk mengelola risiko dan melindungi aset mereka dari berbagai ketidakpastian di masa depan. Salah satu contoh paling populer dari produk derivatif adalah opsi, yang memberikan hak (namun tidak kewajiban) kepada pemegangnya untuk membeli atau menjual aset pada nilai yang telah ditentukan di masa depan. Dalam menentukan nilai opsi, salah satu model yang paling sering digunakan adalah model Black-Scholes (Siswanto, dkk., 2014; Lee, dkk., 2015; Irwan, dkk., 2019; Mardianto, dkk., 2019). Namun, aplikasi model Black-Scholes tidak terbatas hanya pada penentuan nilai opsi. Model ini juga dapat diterapkan dalam penentuan nilai klaim lainnya yang memiliki karakteristik serupa, seperti penentuan premi asuransi deposito di bank (Zhang dan Shi, 2017; Lee dkk., 2015; Pizzutilo dan Francesco, 2015). Dengan demikian, pemahaman dan penggunaan model Black-Scholes membuka banyak peluang untuk inovasi dan pengembangan di berbagai sektor keuangan.

Model Black-Scholes pertama kali dikembangkan pada tahun 1973 oleh Fischer Black dan Myron Scholes. Terdapat beberapa asumsi yang digunakan dalam model Black-Scholes, yaitu, tidak ada peluang arbitrase, tidak ada biaya transaksi, aset tidak memberikan pembayaran dividen, tingkat pengembalian (perubahan nilai aset) sama untuk semua jatuh tempo, derifativ yang diperdagangkan hanya dapat diklaim pada waktu jatuh tempo, dan perubahan nilai aset mengikuti suatu pola acak. Faktor-faktor yang mempengaruhi model ini meliputi nilai aset, nilai kesepakatan (*strike price*), suku bunga, waktu jatuh tempo, dan volatilitas.

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Pada penelitian ini, akan ditentukan nilai klaim dengan memperhatikan payoff yang ditambahkan dengan biaya. Penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi lebih jauh bagaimana model Black-Scholes dapat diterapkan dalam skenario yang lebih kompleks, yaitu dengan memasukkan elemen biaya dalam perhitungan. Payoff yang dimaksud adalah nilai yang diterima oleh pemegang klaim pada saat jatuh tempo, sementara biaya mencakup berbagai pengeluaran yang mungkin timbul selama periode tersebut.

METODE

Jenis Penelitian

Penelitian ini termasuk dalam kategori penelitian kuantitatif yang menggunakan metode analitis untuk mengevaluasi dan memodifikasi model Black-Scholes dalam penentuan harga klaim dengan memasukkan elemen biaya.

Tempat Penelitian

Tempat penelitian dilakukan di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Nurul Huda.

Prosedur Penelitian

Penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahap sebagai berikut:

1. Pengumpulan Literatur: Melakukan tinjauan literatur yang mendalam untuk mengumpulkan berbagai teori dan pendekatan yang relevan dengan penentuan harga klaim dan penggunaan model Black-Scholes.
2. Pengembangan Model: Berdasarkan teori dan referensi yang telah dikumpulkan, kemudian model Black-Scholes dikembangkan dengan memasukkan elemen biaya ke dalam fungsi payoff.
3. Perhitungan analitis: Menghitung klaim dari payoff yang telah dikembangkan.
4. Analisis sensitifitas: Melakukan analisis sensitivitas untuk memahami bagaimana perubahan dalam input (seperti volatilitas atau biaya) mempengaruhi nilai klaim yang dihitung.

Hasil dari perhitungan analisis ini akan dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dari referensi literatur untuk memvalidasi model dan pendekatan yang digunakan.

HASIL DAN DISKUSI

Model Stokastik

Misalkan S_T adalah suatu proses stokastik dan K adalah kontanta yang diketahui pada saat T. Nilai payoff $P(S_T, T, 0)$ pada waktu T diberikan oleh

$$P(S_T, T, 0) = (K - S_T)^+ = \begin{cases} K - S_T, & S_T > K \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases} \qquad (1)$$

Karena nilai S_T diketahui pada waktu T, maka S_T dapat dipandang sebagai suatu peubah acak. Oleh karena itu, $P(S_T, T, 0)$ juga merupakan sebuah peubah acak karena $P(S_T, T, 0)$ merupakan fungsi dari peubah acak. Dengan asumsi tanpa arbitrase, maka $P(S_t, t, 0)$ dapat diperoleh dari ekspektasi payoff opsi yang didiskontokan pada tingkat konstan.

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Untuk memenuhi asumsi penentuan nilai klaim tanpa arbitrase, maka diperlukan model S_t dengan ukuran peluang risk neutral yang memungkinkan perhitungan nilai klaim menggunakan ekspektasi. S_t mengikuti suatu proses acak atau proses stokastik. Berikut ini diberikan definisi dari beberapa proses stokastik yang diperlukan.

Definisi 1 *(Durrett, 2019). Proses stokastik $\{B_t, t > 0\}$ adalah gerak Brown standar jika memenuhi:*

1. $B_0 = 0$.
2. *Untuk setiap titik waktu $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$, perubahan $B_{t_4} - B_{t_3}$ dan $B_{t_2} - B_{t_1}$ adalah saling bebas.*
3. *Untuk $s, t \ge 0$, perubahan $B_{t+s} - B_s$ berdistribusi Normal dengan mean 0 dan variansi t, atau secara ekuivalen dapat ditulis $B_{t+s} - B_s \sim \mathcal{N}(0, t)$.*

Definisi 2 *(Ross, 2014). Proses stokastik $\{X_t, t \ge 0\}$ adalah gerak Brown dengan koefisien drift \mu dan variansi σ^2 jika memenuhi*

1. $X_0 = 0$.
2. *Untuk setiap titik waktu $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$, perubahan $X_{t_4} - X_{t_3}$ dan $X_{t_2} - X_{t_1}$ adalah saling bebas.*
3. *Untuk $s, t \ge 0$, perubahan $X_{t+s} - X_s$ berdistribusi Normal dengan mean μt dan variansi $\sigma^2 t$, atau secara ekuivalen dapat ditulis $X_{t+s} - X_s \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.*

Gerak Brown dengan drift μ dan variansi σ^2 dapat ditulis sebagai

$$X_t = \mu t + \sigma B_t,$$

dengan $\{B_t, t \ge 0\}$ adalah gerak Brown standar.

Definisi 3 *(Ross, 2014). Proses stokastik $\{S_t, t \ge 0\}$ adalah gerak Brown geometri yang dapat dinyatakan sebagai*

$$S_t = S_0 e^{X_t},$$

dengan $\{X_t, t \ge 0\}$ adalah gerak Brown dengan koefisien drift μ dan variansi σ^2, dan $S_0 > 0$ merupakan nilai S pada waktu $t = 0$.

Misalkan S_t diasumsikan mengikuti gerak Brown geometri, sehingga memenuhi persamaan diferensial stokastik

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \qquad (2)$$

dengan μ adalah ekspektasi tingkat perubahan S_t, σ adalah volatilitas, dan B_t adalah gerak Brown standar. Asumsi ini juga mengindikasikan agar nilai S_t tidak negatif. Persamaan (2) dapat ditulis kembali menjadi

$$d \ln S_t = \mu dt + \sigma dB_t.$$

Untuk menentukan proses dari $\ln S_t$, digunakan teorema berikut.

Teorema 1 *(Hull, 2003). (Formula Ito) Misalkan proses stokastik $\{S_t, t \ge 0\}$ memenuhi persamaan diferensial stokastik $dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dB_t$, dengan $\{B_t, t \ge 0\}$ adalah gerak Brown standar, a dan b adalah fungsi dari S_t dan t. Misalkan G adalah suatu fungsi dari S_t dan t yang dapat didiferensialkan dua kali secara kontinu terhadap S_t dan satu kali terhadap t. Maka $G_{S,t} = G(S_t, t)$ memenuhi*

$$dG_{S,t} = \left(\frac{\partial G_{S,t}}{\partial S_t} a + \frac{\partial G_{S,t}}{\partial t} + \frac{1}{2}\, \partial \frac{\partial^2 G_{S,t}}{\partial S_t^2}\, b^2\right) dt + \frac{\partial G_{S,t}}{\partial S_t} b dB_t.$$

Dengan menggunakan Formula Ito diatas, diperoleh ln S_t memenuhi

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

$$d\ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t,$$

sehingga proses stokastik S_t diberikan oleh

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t}, \qquad Bt \sim \mathcal{N}(0, t). \tag{3}$$

Dapat dilihat bahwa S_t mengikuti gerak Brown geometri. S_t dan σ^2 yang diberikan pada Persamaan (3) merupakan ukuran historis atau empiris dengan ukuran peluang $\mathbb{P}$. Ukuran ini disebut sebagai ukuran fisik (*physical measure*). Namun, untuk menentukan nilai klaim pada waku t, akan digunakan suatu ukuran peluang baru yang ekuivalen dengan $\mathbb{P}$, yang dengan ukuran peluang tersebut, diskonto dari S_T bersifat *martingale*. Berikut diberikan definisi dari *martingale*.

Definisi 4 *(Bingham dan Kiesel, 2013) Misalkan $\{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ adalah proses yang diadaptasi dari filtrasi $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$, dan $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ untuk setiap $t \in [0, T]$. M_t disebut martingale jika*

$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$$

untuk setiap $0 \leq s \leq t \leq T$.

Untuk perubahan ukuran peluang dari ukuran peluang fisik $\mathbb{P}$ menjadi ukuran peluang risk-neutral $\mathbb{Q}$, digunakan teorema berikut.

Teorema 2 *(Junghenn, 2019) (Teorema Girsanov) Misalkan $\{B_t, t \geq 0\}$ adalah gerak Brown dengan ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dan misalkan θ adalah suatu konstanta. Definisikan*

$$L_t = e^{\left(-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)}, 0 \leq t \leq T.$$

Maka proses $\tilde{B}_t$ yang didefiniskan oleh

$$\tilde{B}_t = B_t + \theta t, 0 \leq t \leq T$$

adalah gerak Brown dengan ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dan $d\mathbb{Q} = L_t d\mathbb{P}$.

Definisikan $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, dengan r bernilai konstan. Dengan menggunakan Teorema 2, akan ditentukan bentuk θ agar $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ *martingale*, yang diberikan pada Lema berikut.

Lema 1 *(Junghenn, 2019) Terdapat ukuran peluang $\mathbb{Q}$, ekivalen dengan $\mathbb{P}$, sehingga $\{\tilde{S}_t, t \geq 0\}$ martingale, dengan $\mathbb{Q}$ diberikan oleh*

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}} = e^{\left(-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)}$$

dengan $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

Bukti. Diketahui bahwa

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

Sehingga

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \tilde{S}(-rdt + \mu dt + \sigma dB_t) \\ &= \sigma \tilde{S}\left(\frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t\right) \end{aligned}$$

Misalkan $\tilde{B}_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t$. Kemudian substitusikan pada persamaan diatas, diperoleh

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma d\tilde{B}_t.$$

Berdasarkan teorema Girsarnov, misalkan $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$, maka $\{\tilde{B}_t, t \geq 0\}$ adalah gerak Brown standar dengan ukuran peluang $\mathbb{Q}$, dan $\{\tilde{S}_t, t \geq 0\}$ juga *martingale* dengan peluang $\mathbb{Q}$ karena tidak ada drift.

□

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Dari Lema 1, diperoleh $dB_t = d\tilde{B}_t - \frac{\mu - r}{\sigma} dt$. Substitusikan bentuk ini ke Persamaan (2), maka diperoleh

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t \left(d\tilde{B}_t - \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right) \\ &= r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Formula Ito diatas, diperoleh S_t dengan ukuran peluang $\mathbb{Q}$ adalah

$$S_t = S_0 e^{\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \tilde{B}_t\right)} \quad (4)$$

Self-Financing

Misalkan C_T adalah payoff dari sebuah klaim pada waktu jatuh tempo T, dengan C_T adalah sebuah peubah acak yang dapat diukur dengan $\mathcal{F}_t$. Asumsikan bahwa klaim tersebut memiliki ekspektasi yang terbatas pada waktu T. Klaim ini dikatakan dapat direplikasi jika terdapat portofolio self-financing, Π, sehingga nilai akhir portofolio tersebut sama dengan C_T, dengan ukuran peluang risk-neutral $\mathbb{Q}$.

Definisi 5 *(Etheridge, 2002) Strategi self-financing didefinisikan oleh pasangan proses yang dapat diprediksi $\{H_t^0, 0 \le t \le T\}, \{H_t, 0 \le t \le T\}$, masing-masing menotasikan proses stokastik tak berisiko, S_0 , dan proses stokastik berisiko, S, yang termuat dalam portofolio pada waktu t, memenuhi*

$$\int_0^T |H_t^0|\, dt + \int_0^T |H_t|^2\, dt < \infty$$

(dengan peluang satu), dan

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u^2 dS_u$$

(dengan peluang satu), untuk setiap $t \in [0, T]$.

Lema 2 *(Etheridge, 2002) Misalkan $\{H_t^0, 0 \le t \le T\}$ dan $\{H_t, 0 \le t \le T\}$ adalah proses yang dapat diprediksi dan memenuhi*

$$\int_0^T |H_t^0|\, dt + \int_0^T |H_t|^2\, dt < \infty$$

(dengan peluang satu). Misalkan

$$\Pi_t(H^0, H) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t, \quad \tilde{\Pi}_t(H^0, H) = e^{-rt} \Pi_t(H^0, H).$$

Maka $\{H_t^0, H_t, 0 \le t \le T\}$ mendefinisikan strategi self-financing jika dan hanya jika

$$\tilde{\Pi}_t(H^0, H) = \tilde{\Pi}_0(H^0, H) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u.$$

Bukti. Misalkan portofolio $\Pi_t(H^0, H)$ adalah *self-financing*, maka

$$\begin{aligned} d\tilde{\Pi}_t(H^0, H) &= d\left(e^{-rt} \Pi_t(H^0, H)\right) \\ &= -rte^{-rt} \Pi_t(H^0, H) dt + e^{-rt} d\Pi_t(H^0, H) \\ &= -rte^{-rt} (H_t^0 e^{rt} + H_t S_t) dt + e^{-rt} H_t^0 d(e^{rt}) \\ &\qquad + e^{-rt} H_t dS_t \\ &= H_t(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= H_t d\tilde{S}_t. \end{aligned}$$

Integralkan kedua sisi, maka diperoleh

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

$$\widetilde{\Pi}_t(H^0, H) = \widetilde{\Pi}_0(H^0, H) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u$$

□

Misalkan C_T adalah klaim pada waktu T yang akan direplikasi. Selanjutnya, berdasarkan Lema 2, diperlukan suatu proses yang dapat diprediksi, $\{H_t, 0 \leq t \leq T\}$, sedemikian sehingga klaim C_T dapat direplikasi dengan suatu portofolio yang mempunyai H_t aset berisiko dan H_t^0 aset tak berisiko pada waktu t, dengan H_t^0 dipilih sehingga memenuhi

$$\widetilde{\Pi}_t(H^0, H) = H_t\tilde{S}_t + H_t^0 e^{-rt} = H_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u.$$

Berdasarkan Lema 2, portofolio tersebut adalah self-financing, sehingga $\Pi_T = C_T$. Nilai wajar dari klaim pada waktu $t = 0$ dapat ditentukan menggunakan definisi dan teorema berikut.

Definisi 6 *(Etheridge, 2002) Suatu $\{M_t , t \geq 0\}$ dikatakan $\mathcal{F}_t$-martingale yang dapat diintegralkan kuadrat (square-integrable) jika*
$E[|M_t|^2] < \infty$ untuk setiap $t > 0$.

Teorema 3 *(Etheridge, 2002) Misalkan $\{B_t, t \geq 0\}$ adalah gerak Brown dengan filtrasi natural $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Jika $\{M_t , t \geq 0\}$ adalah $\mathcal{F}_t$-martingale yang dapat diintegralkan kuadrat (square-integrable), maka terdapat proses yang diadaptasi dari $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\{H_t, 0 \leq t \leq T\}$, sedemikian sehingga*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s.$$

Teorema 4 *(Etheridge, 2002) Misalkan $\mathbb{Q}$ adalah pengukuran yang diberikan oleh Lema 1. Misalkan suatu klaim pada waktu T diberikan peubah acak tak negatif $C_T \in \mathcal{F}_T$. Jika*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_T^2] < \infty$$

maka klaim dapat direplikasi dan nilai pada waktu t dari suatu portofolio yang direplikasi diberikan oleh

$$\Pi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} C_T \,|\mathcal{F}_t].$$

Khususnya, nilai wajar pada waktu $t = 0$ diberikan oleh

$$\Pi_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} C_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{C}_T].$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 3, terdapat proses $\{H_t, 0 \leq t \leq T\}$ sehingga

$$\tilde{C}_T = H_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u,$$

maka dapat dikonstruksi suatu portofolio yang dapat direplikasi yang mepunyai nilai pada waktu t memenuhi

$$\widetilde{\Pi}_t(H^0, H) = H_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u.$$

Dengan sifat *martingale*, diperoleh

$$\widetilde{\Pi}_t(H^0, H) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[H_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{C}_T|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} C_T|\mathcal{F}_t].$$

Untuk diskonto pada interval $[0, t]$ diperoleh

$$\Pi_t(H^0, H) = e^{rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} C_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} C_T \,|\mathcal{F}_t]$$

□

Diperoleh bahwa, dengan ukuran peluang risk-neutral, nilai klaim dapat dihitung dengan mendiskontokan hasil ekspektasi payoff pada tingkat imbal

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

hasil bebas risiko. Untuk menentukan niali wajar klaim pada waktu t, diberikan proposisi berikut.

Proposisi 1 *(Etheridge, 2002) Nilai klaim pada waktu t dengan payoff pada waktu jatuh tempo T diberikan oleh $C_T = \Lambda(S_T, T)$ adalah $\Pi_t = \Lambda(S_t, t)$, dengan*

$$\Lambda(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda\left(xe^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}\right) \times \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

Bukti. Dari Teorema 4 diperoleh bahwa harga opsi pada waktu t adalah

$$\Lambda(S_t, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\Lambda(S_t, t)\middle|\mathcal{F}_t\right] \qquad (5)$$

dengan $\mathbb{Q}$ adalah pengukuran martingale yang diperoleh pada Teorema 2. Dengan ukuran peluang $\mathbb{Q}$, diperoleh bahwa $\tilde{B}_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ adalah gerak Brown, dan

$$S_T = \tilde{S}_0 e^{\left(\sigma \tilde{B}_T - \frac{\sigma^2}{2} T\right)} e^{rT}.$$

Misalkan $S_T = \frac{S_T}{S_t} S_t$, sehingga

$$\tilde{S}_T = S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(\tilde{B}_T - B_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}. \qquad (6)$$

Substitusikan Persamaan (6) pada Persamaan (5), diperoleh

$$\Lambda(S_t, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{r(T-t)} \Lambda\left(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(\tilde{B}_T - B_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Karena dengan ukuran peluang $\mathbb{Q}$ dan informasi pada $\mathcal{F}_t$, maka $\tilde{B}_T - \tilde{B}_t$ berdistribusi Normal dengan mean 0 dan variansi $(T - t)$, sehingga

$$\begin{aligned}\Lambda(S_t, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)} \Lambda\left(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma z - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}\right) \times \frac{e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\, dz \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda\left(xe^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}\right) \times \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy\end{aligned}$$

□

Dengan menggunakan Proposisi 1, maka nilai klaim pada waktu t dapat dihitung, yang diberikan pada Proposisi berikut.

Proposisi 2 *Misalkan payoff suatu klaim diberikan oleh $P(S_T, T, 0) = (K - S_T)^+$. Nilai risk-neutral klaim pada waktu $t, 0 \le t \le T$, diberikan oleh $P(S_t, t)$ dengan*

$$\begin{aligned} P(S_t, t, 0) &= Ke^{-r(T-t)}\phi(x_2) - S_t\phi(x_1), \qquad (7) \\ x_1 &= \frac{\ln \frac{K}{S_t} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ x_2 &= x_1 + \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

dan $\phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Normal Standar.

Bukti. Dengan menggunakan Proposisi 1, maka nilai klaim risk-neutral diberikan oleh

$$P(S_t, t, 0) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K - S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}x}\right)^+ \times \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy.$$

Misalkan x_2 adalah nilai y ketika $S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} = K$, sehingga

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

$$x_2 = \frac{\ln \frac{K}{S_t} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Karena integran $(\cdot)^+$ bernilai 0 untuk $y > x_2$, maka

$$\begin{aligned} P(S_t, t, 0) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{x_2} \left(K - S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y}\right) \times \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy. \\ &= K e^{-r(T-t)} \phi(x_2) - \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{\left(y - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}}\, dy, \end{aligned}$$

dengan $\phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Normal Standar. Misalkan $x = y - \sigma\sqrt{T-t}$, sehingga $x \to x_2 - \sigma\sqrt{T-t}$ ketika $y \to x_2$. Kemudian, misalkan $x_1 = x_2 - \sigma\sqrt{T-t}$, sehingga

$$x_1 = \frac{\ln \frac{K}{S_t} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Dengan demikian, nilai klaim pada waktu t adalah

$$\begin{aligned} P(S_t, t, 0) &= K e^{-r(T-t)} \phi(x_2) - S_t \phi(x_1), \\ x_1 &= \frac{\ln \frac{K}{S_t} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ x_2 &= x_1 + \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

dan $\phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Normal Standar. $\square$

Nilai Klaim Menggunakan Ekspektasi

Perhatikan bahwa, $(K - S_T)^+$ dapat dituliskan dengan $(K - S_T)\mathbb{I}_{(K > S_T)}$, dengan $\mathbb{I}_{(K > S_T)}$ adalah peubah acak indikator yang memberikan

$$\mathbb{I}_{(K > S_T)} = \begin{cases} 1, & \text{jika } K > S_T \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

Selanjutnya diperoleh Lema berikut.

Lema 3 Misalkan model S_t diberikan pada Persamaan (4), maka diperoleh $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{I}_{(K > S_T)}\right] = \phi(x_2)$ dan $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{I}_{(S_T > K)}\right] = 1 - \phi(x_2)$, dengan x_2 merupakan notasi yang sama pada Proposisi 2.

Bukti. Dari Persamaan (6), diperoleh

$$S_T = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{T-t}Z}, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

maka

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{I}_{(K > S_T)}\right] &= \mathbb{P}(K > S_T) \\ &= \mathbb{P}\left(K > S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{T-t}Z}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z < \frac{\ln \frac{K}{S_t} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z < x_2) \\ &= \phi(x_2) \end{aligned}$$

dan

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{I}_{(S_T > K)}\right] = \mathbb{P}(K < S_T)$$

 E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\sqrt{T-t}Z} > K\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(Z < \frac{\ln\frac{K}{S_t}-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&= 1-\phi(x_2)
\end{aligned}
$$

□

Diperoleh nilai wajar klaim pada waktu t dengan fungsi payoff pada waktu jatuh tempo T diberikan oleh $P(S_T,T,0)=(K-S_T)^+$, dengan menggunakan Proposisi 2, diberikan oleh

$$
\begin{aligned}
P(S_t,t,0) &= Ke^{-r(T-t)}\phi(x_2)-S_t\phi(x_1), \\
x_1 &= \frac{\ln\frac{K}{S_t}-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
x_2 &= x_1+\sigma\sqrt{T-t},
\end{aligned} \tag{8}
$$

dan $\phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Normal Standar. Hasil ini sama dengan harga opsi put yang diperoleh oleh Black dan Scholes (1973).

Nilai Klaim dengan Biaya

Misalkan $J(S_T,T,c)$ adalah payoff dengan melibatkan biaya, maka secara matematis dapat ditulis

$$
J(S_T,T,c)=\begin{cases} K-S_T, & \text{jika } K>S_T \\ c, & \text{selainnya} \end{cases} \tag{9}
$$

dengan c adalah biaya tambahan yang bernilai konstan. Persamaan (9) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$
J(S_T,T,c)=(K-S_T)\mathbb{I}_{(K>S_T)}+c\mathbb{I}_{(S_T>K)} \tag{10}
$$

dengan $\mathbb{I}_A(\cdot)$ adalah peubah acak indikator dari himpunan A. Berdasarkan kerangka kerja Black-Scholes, S_T diasumsikan mengikuti gerak Brown geometri, sehingga

$$
S_t = S_0 e^{\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\tilde{B}_t\right)} \tag{11}
$$

Dengan $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$. Dalam hal ini, nilai klaim dapat dihitung dengan mendiskontokan ekspektasi payoff pada Persamaan (10).

Teorema 5 *Misalkan S_t berdistribusi Lognormal dengan ukuran riskneutral, yang diberikan pada Persamaan (11). Jika fungsi payoff pada waktu jatuh tempo diberikan oleh*

$$
J(S_T,T,c)=(K-S_T)\mathbb{I}_{(K>S_T)}+c\mathbb{I}_{(S_T>K)}
$$

maka nilai klaim pada waktu t diberikan oleh

$$
\begin{aligned}
J(S_t,t,c) &= Ke^{-r(T-t)}\phi(z_2)-S_t\phi(z_1) \\
&\quad + ce^{-r(T-t)}\big(1-\phi(z_2)\big) \\
z_1 &= \frac{ln\left(\frac{K}{S_t}\right)-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
z_2 &= z_1+\sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned} \tag{12}
$$

dengan $\Phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Normal Standar.

Bukti. Dengan pengukuran risk-neutral, nilai sekarang $(t, 0 \le t \le T)$, dapat diperoleh dengan ekspektasi payoff pada waktu jatuh tempo, T, yang didiskontokan pada tingkat imbal hasil bebas risiko, sehingga

$$\begin{aligned} J(S,t,c) &= \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\left((K-S_T)\mathbb{I}_{(K>S_T)} + c\mathbb{I}_{(S_T>K)}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(K-S_T)\mathbb{I}_{(K>S_T)}\right] \\ &\qquad + ce^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{(S_T>K)}\right] \\ &= P(S,t,0) + ce^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{(S_T>K)}\right] \end{aligned}$$

Dari Persamaan (8) telah diperoleh

$$P(S,t,0) = Ke^{-r(T-t)}\phi(z_2) - V_t\phi(z_1).$$

Dengan menggunakan Lema 3, diperoleh

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{(S_T>K)}\right] = 1 - \phi(z_2)$$

Sehingga solusi untuk Persamaan (10) diberikan oleh

$$\begin{aligned} J(S_t,t,c) &= Ke^{-r(T-t)}\phi(z_2) - S_t\phi(z_1) + ce^{-r(T-t)}\left(1-\phi(z_2)\right) \\ z_1 &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ z_2 &= z_1 + \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

dengan $\Phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Normal Standar. $\square$

Misalkan $j(S_t,t,c)$ adalah nilai klaim per satu aset yang dilindungi, dan misalkan $U_t = Ke^{-r(T-t)}$, maka

$$\begin{aligned} j(S_t,t,c) &= \frac{J(S_t,t,c)}{U_t} \\ &= \phi(z_2) - \frac{S_t}{U_t}\phi(z_1) + \frac{c}{K}\left(1-\phi(z_2)\right) \end{aligned}$$

Misalkan $d = \frac{S_t}{U_t}$, maka

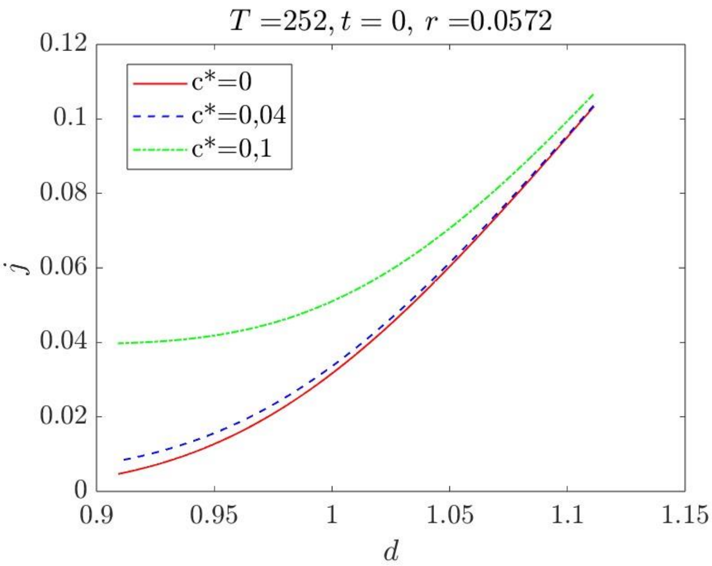
$$\begin{aligned} j(S_t,t,c) &= \phi(h_2) - \frac{1}{d}\phi(h_1) + c^*\left(1-\phi(h_2)\right), \qquad (13) \\ h_1 &= \frac{\ln d - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ h_2 &= h_1 + \sigma\sqrt{T-t} \\ c^* &= \frac{c}{K} \end{aligned}$$

Analisis Sensitifitas

Selanjutnya, dilakukan simulasi model yang telah diperoleh pada Persamaan (13). Dari model yang telah diperoleh, nilai klaim tanpa biaya ekivalen dengan biaya sama dengan 0. Berikut adalah hasil simulasi model menggunakan data masukan pada Tabel 1, dan beberapa nilai biaya, $c^* = 0.04$.

Tabel 1. Data masukan untuk Persamaan (13)

Masukan	Nilai
r	0,0572
σ^2	0,05
T	252 hari



Gambar 1 Grafik nilai klaim dengan beberapa porsi biaya tambahan

Dari hasil analisis sensitifitas diatas, diperoleh bahwa semakin besar biaya tambahan yang diberikan pada fungsi payoff, maka akan menghasilkan nilai klaim yang semakin besar juga. Hasil ini diperkaran karena biaya tambahan bernilai konstan, dan hasil analitis klaim menunjukkan adaya penambahan nilai yang positif.

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil perhitungan secara analitis, dengan adanya penambahan biaya sehingga payoff menjadi

$$J(S_T, T, c) = \begin{cases} K - S_T, & \text{jika } K > S_T \\ c, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Maka, diperoleh nilai klaim pada waktu t

$$\begin{aligned} J(S_t, t, c) &= Ke^{-r(T-t)}\phi(z_2) - S_t\phi(z_1) + ce^{-r(T-t)}\big(1 - \phi(z_2)\big) \\ z_1 &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ z_2 &= z_1 + \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

dengan $\Phi(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Normal Standar. Dari hasil simulasi, diperoleh bahwa semakin besar biaya yang masukkan, semakin besar juga nilai klaim yang dihasilkan.

Penelitian ini menunjukkan bahwa memasukkan elemen biaya dalam perhitungan payoff memiliki dampak signifikan terhadap penentuan nilai klaim. Biaya yang lebih tinggi menyebabkan peningkatan nilai klaim.

REFERENSI

Etheridge, A. (2002): A course in financial calculus, Cambridge University Press. Heston, S. L. dan Nandi, S. (2000): A closed-form GARCH option valuation model, The review of financial studies, 13(3), 585–625.

E-ISSN : 3048-3220 (Media Online)

Hull, J. C. (2003): Options futures and other derivatives, Pearson Education India. IFSB (2011): Guidance Note on the Recognition of Ratings by External Credit Assessment Institution on Takaful, 1–16.

Irawan, W. O., & Permana, D. (2019). Penentuan harga opsi dengan model Black-Scholes menggunakan metode beda hingga Center Time Center Space (CTCS). *Journal of Mathematics UNP*, *4*(1).

Junghenn, H. D. (2019): An Introduction to Financial Mathematics: Option Valuation, CRC Press.

Lee, S.-C., Lin, C.-T., dan Tsai, M.-S. (2015): The pricing of deposit insurance in the presence of systematic risk, Journal of Banking & Finance, 51, 1–11.

Mardianto, L., Pratama, A. P., Soemarsono, A. R., Hakam, A., & Putri, E. R. M. (2019). Comparison of numerical methods on pricing of European put options. *(IJCSAM) International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, *5*(1), 30-34.

Pizzutilo, F. dan Francesco, C. (2015): Loan guarantees: An option pricing theory perspective, International Journal of Economics and Financial Issues, 5(4), 905–909.

Ross, S. M. (2014): Variations on Brownian motion, Introduction to Probability Models, 612–14.

Siswanto, H., & Purnomo, K. D. (2014, November). PENENTUAN HARGA OPSI PADA MODEL BLACK-SCHOLES MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DUFORT-FRANKEL. In *Prosiding Seminar Nasional Matematika* (Vol. 329).

Zhang, Y. dan Shi, B. (2017): Systematic risk and deposit insurance pricing: based on market model and option pricing theory, China Fin. Review Inter, 7(4), 390–406.