



Analisis Model Rantai Markov Waktu Kontinu pada Model Transmisi dan Vaksinasi COVID-19: Studi Kasus Provinsi DKI Jakarta

Rifaldy Atlant Tungga

rifaldyatlantt@ith.ac.id

Program Studi Matematika

Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

Abstract : In 2019, the Novel Coronavirus was discovered in Wuhan, China, and later named the disease caused by the virus, called COVID-19. On March 31, 2020, the Indonesian government announced that COVID-19 was a pandemic. Previously, many mathematical models have been used to capture the transmission of this disease. In this paper, a new mathematical model is introduced, namely the continuous-time Markov chain modeling of SIRV, which takes into account the probabilities between events of several groups of individuals, namely the susceptible (S), infected (I), recovered (R), and vaccinated (V) groups. Thus, it is considered to provide more realistic results compared to deterministic models. Using a period of approximately one year, it was obtained that vaccination carried out with a vaccination rate $v=0.002$ was considered ineffective.

Keywords : Continues Time Markov Chain, COVID-19, SIRV, Transition Probability, DKI Jakarta.

Abstrak : Pada tahun 2019, Novel Coronavirus ditemukan di Wuhan, Tiongkok dan belakangan dinamakan penyakit yang disebabkan oleh virus tersebut, dinamakan COVID-19. Pada tanggal 31 maret 2020, pemerintah Indonesia mengungumkan bahwa COVID-19 adalah pandemi. Sebelumnya telah banyak model matematika yang digunakan untuk menangkap transmisi dari penyakit ini. Pada tulisan ini, diperkenalkan model matematika baru, yakni pemodelan rantai Markov waktu kontinu SIRV yang di dalamnya memperhitungkan peluang-peluang antar kejadian beberapa kelompok individu, yaitu kelompok rentan (S), terinfeksi (I), sembuh (R), dan tervaksin (V). Sehingga dianggap memberikan hasil yang lebih realistik dibandingkan model-model deterministik. Dengan menggunakan jangka waktu kurang lebih setahun, diperoleh hasil bahwa vaksinasi yang dilakukan dengan mengikuti rate vaksinasi $v=0.002$, dianggap belum efektif.

Kata Kunci : Rantai Markov Waktu Kontinu, COVID-19, SIRV, Peluang Transisi, DKI Jakarta.

PENDAHULUAN

Novel coronavirus (CoV) adalah galur baru dari coronavirus. Penyakit ini, yang disebabkan oleh novel coronavirus yang pertama kali diidentifikasi di Wuhan, Tiongkok, diberi nama coronavirus disease 2019 (COVID-19) – 'CO' berasal dari corona, 'VI' berasal dari virus, dan 'D' berasal dari disease (penyakit). Sebelumnya, penyakit ini disebut dengan '2019 novel coronavirus' atau '2019-nCoV.'(WHO, 2020). Tercatat, COVID-19 pertama kali

teridentifikasi di Indonesia pada tanggal 29 Februari 2020 Pada tanggal 31 Maret 2020, COVID-19 telah ditetapkan sebagai pandemi di Indonesia melalui Keputusan Presiden Nomor 11 Tahun 2020 tentang penetapan Kedaruratan Kesehatan Masyarakat Coronavirus Disease 2019 di Indonesia (KEMENKES, 2020). Per 3 Juni 2021 tercatat di Indonesia sebanyak 1.837.126 orang terinfeksi COVID-19 dengan jumlah kematian sebanyak 51.096 orang. Penyakit yang telah menyebar di 34 provinsi di Indonesia ini, memiliki kasus terbanyak di Provinsi DKI Jakarta dengan total 432.799 kasus (Komite, 2021), (Dinas, 2021).

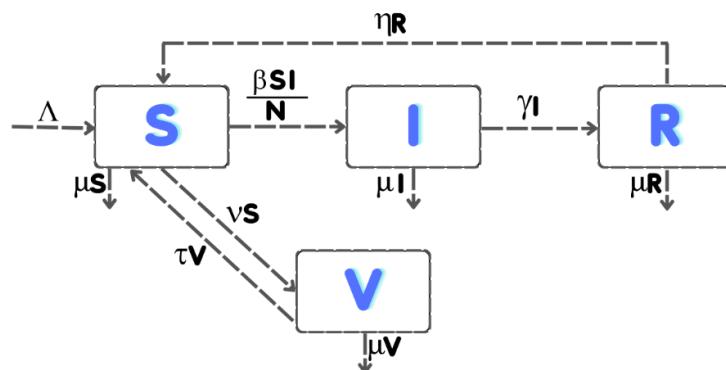
Bukti saat ini menunjukkan bahwa virus ini menyebar terutama di antara orang-orang yang melakukan kontak dekat satu sama lain, misalnya dalam jarak percakapan. Virus ini dapat menyebar dari mulut atau hidung orang yang terinfeksi melalui partikel cairan kecil ketika mereka batuk, bersin, berbicara, bernyanyi, atau bernapas. Orang lain kemudian dapat tertular virus ketika partikel infeksi yang melewati udara terhirup dalam jarak dekat jika partikel infeksi bersentuhan langsung dengan mata, hidung, atau mulut (penularan droplet) (WHO, 2020). Di Indonesia, termasuk di Provinsi DKI Jakarta, vaksinasi telah dilakukan sebagai langkah dalam menekan angka kematian akibat COVID-19. Pada tahun 2021, Rifaldy dkk (Tungga, 2021) membuat sebuah model transmisi COVID-19 yang mempertimbangkan faktor vaksinasi untuk kasus Provinsi DKI Jakarta. Dalam tulisannya, dipaparkan model deterministik kontinu dan model deterministik diskrit transmisi COVID-19 yang mempertimbangkan faktor vaksinasi. Pada tulisan ini, akan diperkenalkan sebuah model stokastik rantai markov waktu kontinu untuk menangkap fenomena penyebaran virus COVID-19 dengan mempertimbangkan faktor vaksinasi untuk kasus Provinsi DKI Jakarta.

METODE PENELITIAN

Model Deterministik SIRV Kontinu Transmisi dan Vaksinasi Virus COVID-19. Dalam rangka menangkap dinamika penyebaran dan vaksinasi COVID-19, pada tulisan ini digunakan model rantai Markov waktu kontinu yang didasarkan pada model deterministik kontinu SIRV yang telah diperkenalkan oleh (Atlant Tungga, Rifaldy, 2021), dimana terdapat kelompok individu yakni, kelompok individu rentan (S), kelompok individu terinfeksi (I), kelompok individu sembuh (R), dan kelompok individu tervaksin (V). Pada model deterministik ini, digunakan beberapa asumsi dasar, diantaranya: 1) total populasi konstan, dimana tidak ada penambahan atau pengurangan populasi dari total populasi awal; 2) Hanya ada kematian alami, dimana rate kematian alami (μ) sama dengan rate kelahiran baru (Λ); 3) Setiap individu S akan terpapar virus ketika kontak dengan individu I dengan *rate incidence*

sebesar β ; 4) Setiap individu I akan sembuh dan menjadi individu R dengan rate kesembuhan γ ; 5) setiap individu R dapat kembali menjadi individu S ketika vaksin alaminya sudah kadaluwarsa, dengan rate η ; 6) Setiap individu S yang belum terinfeksi, mendapatkan vaksinasi dan menjadi individu V dengan rate vaksinasi v ; 7) Setiap individu V dapat kembali menjadi individu S ketika vaksinnya sudah kadaluwarsa dengan rate sebesar τ .

Berdasarkan asumsi dasar di atas, maka dinamika penyebaran dan vaksinasi virus COVID-19 di Provinsi DKI Jakarta, diberikan pada Gambar 1



Gambar 1. Kompartemen Model SIRV Kontinu Transimisi dan Vaksinasi Virus COVID-19

Berdasarkan Gambar 1, model SIRV Kontinu diberikan oleh sistem persamaan differensial biasa berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{N} - (\mu + v)S + \tau V + \eta R$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu + \eta)R$$

$$\frac{dV}{dt} = vS - (\mu + \tau)V$$

dimana

Tabel 1. Definisi Parameter

Parameter	Definisi	Dimensi
Λ	Rate kelahiran Alami	$[T]^{-1}$
μ	Rate kematian alami	$[T]^{-1}$
v	Rate Vaksinasi	$[T]^{-1}$
τ	Rate peluruhan imunitas setelah vaksinasi	$[T]^{-1}$
η	Rate peluruhan imunitas setelah sembuh	$[T]^{-1}$
β	Rate kontak antara individu rentan dan terinfeksi	$[T]^{-1}$
γ	Rate kesembuhan individu terinfeksi	$[T]^{-1}$

Model Rantai Markov Waktu Kontinu SIRV Pada Transmisi dan Vaksinasi Virus COVID-19. Misalkan $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, dan $V(t)$ adalah masing-masing variabel acak yang mengacu pada kelompok individu kelompok rentan, kelompok individu sembuh, dan kelompok individu tervaksin. Misalkan Δt mengacu pada interval waktu yang cukup kecil sedemikian rupa sehingga pada interval waktu tersebut $(t, t + \Delta t)$, terdapat paling banyak satu peristiwa yang terjadi. Berdasarkan asumsi yang diterapkan pada model deterministik, kejadian yang mungkin terjadi pada selang waktu Δt dijelaskan sebagai berikut:

- a. Kejadian satu individu rentan terinfeksi pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan transisi yang disimbolkan oleh

$$S \rightarrow S - 1 \text{ dan } I \rightarrow I + 1$$

Dengan peluang transisi

$$\frac{\beta SI}{N} \Delta t + o(\Delta t)$$

- b. Kejadian satu individu rentan tervaksin pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan transisi yang disimbolkan oleh

$$S \rightarrow S - 1 \text{ dan } V \rightarrow V + 1$$

Dengan peluang transisi

$$vS\Delta t + o(\Delta t)$$

- c. Kejadian satu individu tervaksin Kembali menjadi rentan pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan transisi yang disimbolkan oleh

$$S \rightarrow S + 1 \text{ dan } V \rightarrow V - 1$$

Dengan peluang transisi

$$\tau V\Delta t + o(\Delta t)$$

- d. Kejadian satu individu Sembuh Kembali menjadi Rentan pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan transisi yang disimbolkan oleh

$$S \rightarrow S + 1 \text{ dan } R \rightarrow R - 1$$

Dengan peluang transisi

$$\eta R\Delta t + o(\Delta t)$$

- e. Kejadian satu individu terinfeksi menjadi sembuh pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan transisi yang disimbolkan oleh

$$I \rightarrow I - 1 \text{ dan } R \rightarrow R + 1$$

Dengan peluang transisi

$$I\gamma\Delta t + o(\Delta t)$$

- f. Kejadian satu individu terinfeksi mati alami dan kelahiran satu individu rentan pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan transisi yang disimbolkan oleh

$$I \rightarrow I - 1 \text{ dan } S \rightarrow S + 1$$

Dengan peluang transisi

$$\mu I \Delta t + o(\Delta t)$$

- g. Kejadian satu individu sembuh mati alami dan kelahiran satu individu rentan pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan transisi yang disimbolkan oleh

$$R \rightarrow R - 1 \text{ dan } S \rightarrow S + 1$$

Dengan peluang transisi

$$\mu R \Delta t + o(\Delta t)$$

- h. Kejadian satu individu tertvaksin mati alami dan kelahiran satu individu rentan pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan transisi yang disimbolkan oleh

$$V \rightarrow V - 1 \text{ dan } S \rightarrow S + 1$$

Dengan peluang transisi

$$\mu V \Delta t + o(\Delta t)$$

- i. Kejadian dimana tidak terjadi adanya perubahan di dalam populasi pada interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dengan transisi yang disimbolkan oleh

$$S \rightarrow S, I \rightarrow I, R \rightarrow R, V \rightarrow V$$

Dengan peluang transisi

$$1 - \left[\frac{\beta SI}{N} + vS + \tau V + \eta R + I\gamma + \mu I + \mu R + \mu V \right] \Delta t + o(\Delta t)$$

Misalkan perubahan pada variabel acak S, I, R, V pada interval $(t, t + \Delta t)$ dinyatakan dengan $\Delta S, \Delta I, \Delta R$, dan ΔV , dengan $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t), \Delta I = I(t + \Delta t) - I(t), \Delta R = R(t + \Delta t) - R(t)$, dan $\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$, maka peluang transisi infinitesimal yang menjelaskan rantai markov multivariat yang diberikan pada poin-poin sebelumnya dinyatakan sebagai berikut.

$$prob\{(\Delta S, \Delta I, \Delta R, \Delta V) = (i, j, k, l) | (S, I, R, V)\} = \begin{cases} \frac{\beta SI}{N} \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (-1, 1, 0, 0) \\ vS \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (-1, 0, 0, 1) \\ \tau V \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (1, 0, 0, -1) \\ \eta R \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (1, 0, -1, 0) \\ \gamma I \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (0, -1, 1, 0) \\ \mu I \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (1, -1, 0, 0) \\ \mu R \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (1, 0, -1, 0) \\ \mu V \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (1, 0, 0, -1) \end{cases}$$

Dimana Peluang tidak ada perubahan dalam populasi adalah $Prob\{(\Delta S, \Delta I, \Delta R, \Delta V) = (0,0,0,0)|(S, I, R, V)\}$ adalah sama dengan $1 - [\frac{\beta SI}{N} + \nu S + \tau V + \eta R + I\gamma + \mu I + \mu R + \mu V]\Delta t + o(\Delta t)$. Peluang kejadian lainnya adalah $o(\Delta t)$. Agar menyederhanakan penulisan, $S(t)$ akan dinyatakan dalam kondisi variabel acak lainnya, yaitu $S(t) = N(t) - I(t) - R(t) - V(t)$ sehingga peluang transisi infinitesimalnya dapat disederhanakan menjadi :

$$prob\{(\Delta I, \Delta R, \Delta V) = (i, j, k)|(I, R, V)\} = \begin{cases} \frac{\beta SI}{N} \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (1, 0, 0) \\ \nu S \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (0, 0, 1) \\ \tau V \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (0, 0, -1) \\ \eta R \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (0, -1, 0) \\ \gamma I \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (-1, 1, 0) \\ \mu I \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (-1, 0, 0) \\ \mu R \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (0, -1, 0) \\ \mu V \Delta t + o(\Delta t) & (i, j, k, l) = (0, 0, -1) \end{cases}$$

Peluang tidak ada perubahan yaitu $Prob\{(\Delta I, \Delta R, \Delta V) = (0, 0, 0, 0)|(I, R, V)\} = 1 - [\frac{\beta SI}{N} + \nu S + \tau V + \eta R + I\gamma + \mu I + \mu R + \mu V]\Delta t + o(\Delta t)$. Peluang kejadian lainnya sama dengan $o(\Delta t)$. Misalkan s, i, r, v berturut-turut menyatakan nilai dari variabel acak S, I, R, V dan $P_{irv}(t)$ adalah fungsi peluang bersama, yaitu $P_{irv}(t) = Prob\{I(t) = i, R(t) = r, V(t) = v\}$ maka $P_{irv}(t + \Delta t)$ adalah sama dengan:

$$\begin{aligned} P_{irv}(t + \Delta t) &= P_{i-1,r,v}(t) \frac{\beta(s+1)i}{N} \Delta t + P_{i,r,v-1}(t) \nu(s+1) \Delta t + P_{i,r,v+1}(t) \tau(v+1) \Delta t + \\ &P_{i,r+1,v}(t) \eta(r+1) \Delta t + P_{i+1,r-1,v}(t) (i+1) \gamma \Delta t + P_{i+1,r-1,v}(t) \mu(i+1) \Delta t + P_{i,r+1,v}(t) \mu(r+1) \Delta t + P_{i,r+1,v}(t) \mu(v+1) \Delta t - P_{i,r,v}(t) \left(1 - \left[\frac{\beta(si)}{N} + \nu s + \tau v + \eta r + \gamma i + \mu(i+r+v)\right]\right) \Delta t + P_{irv}(t) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{P_{irv}(t + \Delta t) - P_{irv}(t)}{\Delta t} &= P_{i-1,r,v}(t) \frac{\beta(s+1)i}{N} + P_{i,r,v-1}(t) \nu(s+1) + P_{i,r,v+1}(t) \tau(v+1) + \\ &P_{i,r+1,v}(t) \eta(r+1) + P_{i+1,r-1,v}(t) (i+1) \gamma + P_{i+1,r-1,v}(t) \mu(i+1) + P_{i,r+1,v}(t) \mu(r+1) + \\ &P_{i,r+1,v}(t) \mu(v+1) - P_{i,r,v}(t) \left(1 - \left[\frac{\beta(si)}{N} + \nu s + \tau v + \eta r + \gamma i + \mu(i+r+v)\right]\right) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Dengan mengambil limit $\Delta t \rightarrow 0$ pada kedua ruas, maka akan diperoleh Persamaan Diferensial *Kolmogorov* untuk proses bivariat,

$$\frac{dP_{irv}(t)}{dt} = P_{i-1,r,v}(t) \frac{\beta(s+1)i}{N} + P_{i,r,v-1}(t)v(s+1) + P_{i,r,v+1}(t)\tau(v+1) + P_{i,r+1,v}(t)\eta(r+1) + P_{i+1,r-1,v}(t)(i+1)\gamma + P_{i+1,r-1,v}(t)\mu(i+1) + P_{i,r+1,v}(t)\mu(r+1) + P_{i,r+1,v}(t)\mu(v+1) - P_{i,r,v}(t) \left(1 - \left[\frac{\beta(si)}{N} + vs + \tau v + \eta r + \gamma i + \mu(i+r+v) \right] \right)$$

Solusi dari persamaan diferensial (6) diatas merupakan fungsi bersama. Penentuan solusi dari persamaan ini dapat dicari menggunakan teknik pembangkit momen (ataupun fungsi pembangkit peluang), akan tetapi penentuan solusi menggunakan teknik ini cukup rumit karena transformasi persamaan di atas ke bentuk persamaan diferensial parsial menghasilkan persamaan diferensial parsial tak linear dengan 5 peubah bebas. Oleh karena itu, solusi dari persamaan tersebut akan diaproksimasi secara numerik pada bagian Hasil Penelitian dan Pembahasan.

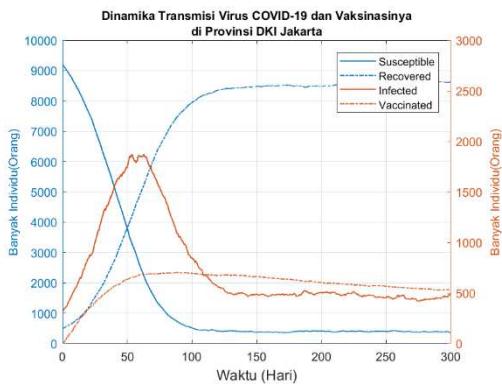
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi numerik untuk model rantai Markov waktu kontinu. Nilai awal dipilih $\mathbf{S(0)} = 9200, \mathbf{I(0)} = 500, \mathbf{R(0)} = 300, \mathbf{V(0)} = 0$. Selain itu, ditentukan juga nilai parameter yang mengikuti

Tabel 2. Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Dimensi
Λ	$\frac{1}{70 \times 365}$	$[T]^{-1}$
μ	$\frac{1}{70 \times 365}$	$[T]^{-1}$
ν	0.002	$[T]^{-1}$
τ	$\frac{1}{365}$	$[T]^{-1}$
η	$\frac{1}{270}$	$[T]^{-1}$
β	0.1	$[T]^{-1}$
γ	$\frac{1}{14}$	$[T]^{-1}$

Mengikuti nilai awal yang diberikan dan nilai parameter pada Tabel 2 (Atlant Tungga, Rifaldy, 2021). Maka diperoleh hasil simulasi numerik model rantai Markov waktu kontinu SIRV pada gambar.



Gambar 2. Dinamika Penyebaran dan Vaksinasi Virus COVID-19 Menggunakan Model Rantai Markov Waktu Kontinu

Dapat dilihat bahwa pada hasil simulasi numerik model Rantai Markov Waktu Kontinu, dengan mengambil waktu simulasi 300 hari di Provinsi DKI Jakarta, populasi sembuh meningkat dengan drastis, sedangkan populasi terinfeksi mengalami kenaikan cukup drastis hingga pada akhir bulan kedua. Untuk populasi rentan, penurunan cukup drastis juga terjadi hingga hari ke-seratus, sedangkan untuk populasi tervaksin juga mengalami kenaikan, tapi tidak terlalu signifikan. Dengan ini, diperoleh hasil bahwa vaksinasi yang dilakukan dengan rate sebesar $\nu = 0.002$ yang artinya setiap harinya terjadi vaksinasi sebesar 0,2 % dari total populasi rentan, dianggap tidak cukup untuk mendorong angka imunitas. Justru, imunitas terbesar datang dari angka kesembuhan (imunitas alami). Maka dapat dikatakan, angka imunitas harian harusnya dapat ditingkatkan lagi.

Dari hasil simulasi numerik yang ditunjukkan pada Gambar 2, pada dinamika populasinya terjadi *uncertainty*, dimana hal ini ditunjukkan pada kurva solusi untuk tiap variable acaknya ($S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, $V(t)$) yang fluktuatif dan tidak “semulus” seperti pada kurva Solusi model deterministik. Hal ini disebabkan, pada model rantai markov waktu kontinu kejadian di setiap interval waktu $(t, t + \Delta t)$ dipengaruhi oleh peluang antar kejadian, berbeda dengan kejadian pada model deterministik yang bersifat sudah ditentukan. Hal ini tentunya linear dengan kejadian nyata, dimana dinamika populasi di dalam suatu sistem tentunya lebih bersifat fluktuatif. Oleh karena itu, menurut penulis, model rantai Markov waktu kontinu dianggap lebih akurat dalam menangkap dinamika penyebaran penyakit pada model matematika.

SIMPULAN

Dari hasil simulasi numerik menggunakan model Rantai Markov Waktu Kontinu dengan periode simulasi 300 hari di Provinsi DKI Jakarta, teramatii bahwa meskipun tingkat

vaksinasi dilakukan secara rutin, tingkat imunitas yang signifikan lebih banyak berasal dari kesembuhan alami. Hasil menunjukkan fluktuasi dalam dinamika populasi, yang secara realistik tercermin dari sifat peluang antar kejadian pada model ini, menjadikannya pendekatan yang lebih akurat dalam menggambarkan dinamika penyebaran penyakit dibandingkan dengan model deterministik.

DAFTAR RUJUKAN

- Dinas Kesehatan Provinsi DKI Jakarta. (2021). Data Pemantauan COVID-19 DKI Jakarta. 21 Juni 2021. <https://corona.jakarta.go.id/id>.
- Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, (2020). Kiprah Ditjen Kesmas Pandemi COVID19. https://kesmas.kemkes.go.id/assets/uploads/contents/others/Kiprah_Ditjen_Kesmas_Pandemi_COVID19_web.pdf.
- Komite Penanganan COVID-19 dan Pemulihan Ekonomi Nasional. (2021). Vaksinasi COVID-19. Jakarta
- Tungga, R. A., Sa'adah, A., Safira, A. K., Fahlena, H., Mariani., Arsana, M., Prihantini., & Zahra, U. U. (2022). Analysis of the implementation of COVID-19 vaccination program in DKI Jakarta province, Indonesia. *AIP Conf. Proc.* 2 August 2022; 2498 (1): 020002. <https://doi.org/10.1063/5.0083280>.
- World Health Organization, (2020). Hal-hal yang perlu Anda ketahui tentang corona virus untuk melindungi Anda dan keluarga. <https://www.unicef.org/indonesia/id/coronavirus/tanya-jawab-seputar-coronavirus>.