

STABILISASI PENDULUM TERBALIK MENGGUNAKAN LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN DAN VISUALISASINYA

Refin Malikul Iskandar¹, Erwin Susanto^{*2}, Basuki Rahmat³

^{1,2,3}Fakultas Teknik Elektro, Universitas Telkom, Bandung

Email: ¹refinmalikul@student.telkomuniversity.ac.id, ²erwinelektro@telkomuniversity.ac.id,
³basukir@telkomuniversity.ac.id
^{*}Penulis Korespondensi

(Naskah masuk: 10 Oktober 2024, diterima untuk diterbitkan: 9 November 2025)

Abstrak

Pendulum terbalik tipe *cart-pole* merupakan representasi matematis dari salah satu sistem yang tidak stabil. Secara umum, konstruksi fisik pendulum terbalik tersusun atas gerobak atau *cart* dan batang pendulum. Tanpa mekanisme kendali, pendulum akan terus jatuh akibat gaya gravitasi karena sistem sangat tidak stabil. Pada studi ini digunakan metode kendali *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) untuk memaksa batang pendulum tegak vertikal sekitar sudut 0° sesuai posisi referensi yang diinginkan dengan menggerakkan *cart*. Pengujian dan simulasi menggunakan fitur MATLAB *simulink*, untuk model pendulum terbalik yang dikendalikan dengan LQG menghasilkan performansi dinamika sistem. Hasil pengujian menunjukkan posisi *cart* paling stabil -3 m dari posisi awal, *rise time* 2,31 detik, *settling time* 2,44 detik dan sudut simpangan maksimum batang pendulum $1,9^\circ$ disekitar posisi tegak vertikal. Untuk memverifikasi keberhasilan metode yang digunakan, visualisasi sistem kendali disajikan dengan Simmechanics dan Blender graph editor.

Kata kunci: *pendulum terbalik tipe cart-pole, kendali LQG, visualisasi sistem dinamik, Simulink, blender, Simmechanics*

INVERTED PENDULUM STABILIZATION USING LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN AND ITS VISUALIZATION

Abstract

The *cart-pole inverted pendulum* is a mathematical representation of an unstable system. In general, the physical construction of an inverted pendulum consists of a cart and a pendulum rod. Without a control mechanism, the pendulum will continue to fall due to gravitational force because the system is highly unstable. In this study, the *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) control method was used to force the pendulum rod to be vertical at an angle of approximately 0° according to the desired reference position by moving the cart. Testing and simulation using the MATLAB *Simulink* feature for the inverted pendulum model controlled by LQG produced the system's dynamic performance. The test results showed that the most stable cart position was -3 m from the initial position, with a *rise time* of 2.31 seconds, a *settling time* of 2.44 seconds, and a maximum pendulum rod deviation angle of 1.9° around the vertical position. To verify the success of the method used, the control system visualization was presented with *Simmechanics* and *Blender graph editor*.

Keywords: *cart-pole type inverted pendulum, LQG control, dynamic system visualization, Simulink, Blender, Simmechanics*

1. PENDAHULUAN

Penerapan sistem kendali telah memainkan peran penting dalam kehidupan sehari-hari dengan tujuan menghasilkan kinerja yang diinginkan. Kestabilan merupakan salah satu aspek kualitas kinerja sebuah sistem kendali yang perlu diperbaiki dan dipertahankan kinerjanya [LIN, X., LIU, K.,

2025], [MUSTARY, S., KASHEM, M.A., CHOWDHURY, M.A., RANA, Md.M, 2024]. Pada model pendulum terbalik, kestabilan merupakan parameter keberhasilan yang ingin dicapai menggunakan berbagai metode kendali. Tanpa kendali yang mencukupi akan sulit bagi pendulum terbalik untuk mempertahankan kestabilannya, mengingat model pendulum merupakan model sistem

dinamik yang sangat tidak linier sekaligus tidak stabil.

Salah satu contoh implementasi populer dari konsep pendulum terbalik adalah *robot segway*, yang biasa dipakai untuk mengangkat beban dengan kecepatan cukup rendah [DOZZA, M., LI, T., BILLSTEIN, L., and SYERNLOV, C. and RASCH, A., 2023]. Perangkat ini terdiri dari *steering handle* dan dua roda. Ketika segway digunakan, dua roda berada dalam posisi bersebelahan. Ketika pengguna condong ke depan, roda berputar ke arah yang sama, menghasilkan gerakan maju. Ketika pengguna ingin berbelok, roda berputar dengan kecepatan yang berbeda, membentuk gerakan berkelok-kelok. Konsep pendulum terbalik juga diaplikasikan pada robot beroda [GALE-CAZAN, C-B., BOJAN-DRAGOS, C-A., PRECUP, R-E., ROMAN, R-C., PETRIU, E.M., SZEDLAK-STINEAN, A-I. 2022] dan sebuah quadrotor [MIHALIK, M., BUJNAK, M., and SIMAK, V., 2021], [ZHANG, C., LIU, T., SONG, S., WANG, J., and MENG, M.Q.-H. 2022], [OLOO, J. 2023].

Laporan publikasi riset lainnya tentang kendali pendulum terbalik [CHACKO, S.J., NEERAJ, P.C., and ABRAHAM, R.J. 2024] menyebutkan bahwa optimasi kendali Linear Quadratic Regulator (LQR) memiliki kelebihan kinejra dibandingkan beberapa skema kendali lainnya. Laporan [RIZKI, A.S., PANGARIBUAN, P., and WIBOWO, A.S. 2018] mengungkapkan bahwa kendali fuzzy mampu mempertahankan sudut pendulum ketika diberi gangguan sinyal impuls, namun tidak efektif dalam mempertahankan posisi *cart*. Oleh karena itu, kami akan merancang sistem kendali untuk pendulum terbalik dengan menggunakan LQR dan estimator agar sistem dapat tahan terhadap gangguan sekaligus kestabilan posisi *cart*.

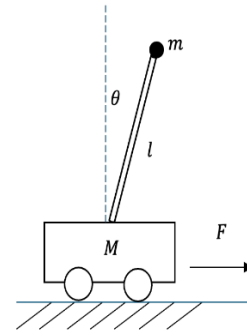
Tujuan studi adalah untuk menyajikan simulasi visual dan grafik model pendulum terbalik, berbasis stabilisasi menggunakan kendali LQR dan LQG. Visualisasi dan simulasi robot pendulum terbalik kami lakukan menggunakan MATLAB dan Blender, dengan fitur Simmechanics Multibody untuk animasi serta Simulink untuk mendapatkan trayektori dinamika sistem secara analitik sehingga memiliki kontribusi berbeda dengan yang sudah dilaporkan oleh sumber referensi lainnya.

2. MODEL MATEMATIKA SISTEM

Model pendulum terbalik merupakan salah satu demonstrasi model sistem yang tidak stabil. Model ini terdiri atas *cart*, batang pendulum (*pole*) dan roda [MAGDY, M., EL MARHOMY, A., and ATTIA, M.A., 2019]. Gambar 1 menunjukkan skematik pendulum terbalik yang memiliki gaya horizontal F dan gaya vertikal $l\theta$.

$$\sum F = M\ddot{x}_y \quad (1)$$

$$\sum \tau = I\ddot{\theta}_y \quad (2)$$



Gambar 1. Sistem fisik pendulum terbalik tipe cart-pole

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \quad (3)$$

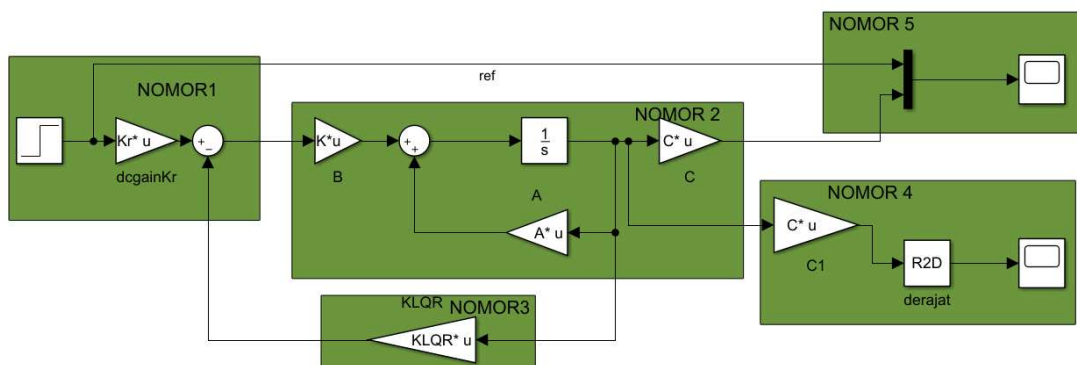
$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta = mgl\sin\theta - bI\dot{\theta} \quad (4)$$

Dinamika sistem dalam naskah ini memanfaatkan hukum Newton dan momentum sudut. Persamaan (1) dan (2) menggambarkan gerakan horisontal dan vertikal sistem pendulum, yang dijabarkan dalam persamaan (3) dan (4), di mana:

- (F) adalah gaya roda pada kereta (dinyatakan dalam Newton).
- (m) adalah massa pendulum (dalam kilogram).
- (I) adalah momen inersia pendulum (dalam kilogram meter kuadrat).
- (M) adalah massa kereta (dalam kilogram).
- (g) adalah percepatan gravitasi (sekitar $9,81 \text{ m/s}^2$).
- (b) adalah koefisien gaya gesek (dalam Newton-detik per meter).

3. DESAIN KENDALI OPTIMAL

Kendali optimal adalah proses yang bertujuan untuk menentukan lintasan state suatu sistem dengan meminimalkan biaya dan memaksimalkan performa. dengan menyeimbangkan antara keterbatasan fisik sistem dan performa yang dihasilkan. Salah satu metode kendali optimal yang sering digunakan adalah Linear Quadratic Regulator (LQR) dan jika mempertimbangkan ketidakpastian dan gangguan maka dapat dikembangkan dalam bentuk Linear Quadratic Gaussian (LQG). Beberapa aplikasi LQG dapat dijumpai pada kendali drones, sistem turbin boiler maupun turbin angin seperti yang dilaporkan oleh [FAHMIZAL, NUGROHO, H.A., CAHYADI, A.I., ARDIYANTO, I., 2024], [KRUTHIKA, U., PANEERSELVAM, S., 2025] dan [HAWARI, Q., KIM, T., WARD, C., FLEMING, J., 2023].



Gambar 2. Model sistem LQR dengan Simulink

3.1. Kendali LQR

LQR adalah metode kendali optimal yang digunakan untuk mengatur sistem linier dengan meminimalkan fungsi biaya kuadratik (quadratic cost function) yang biasanya mencakup selisih antara state aktual dan state referensi seperti ditunjukkan pada persamaan (5), serta perbedaan antara input kendali aktual dan input kendali referensi.

$$J = \int_0^{\infty} [x(t)Qx(t) + u(t)Ru(t)]dt \quad (5)$$

dimana, (Q, R) : sembarang matriks positif definit.

Kelebihan dari kendali LQR adalah kemampuannya untuk mengatur sistem multivariable dalam ruang keadaan (state space) berikut:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6)$$

$$y = Cx + Du \quad (7)$$

dimana, (x) : Vektor state sistem, (u) : Vektor input kendali, (y) : Vektor output sistem, (A) : Matriks dinamika sistem, (B) : Matriks input, (C) : Matriks output dan (D) : Matriks umpan maju. Jika $u = -Kx$ dan gain $K = -R^{-1}B^T P$ akan meminimumkan fungsi biaya. Matrik P diperoleh dari persamaan algebraic Riccati equation (ARE)

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (8)$$

3.2. Kendali LQG

Linear Quadratic Gaussian (LQG) merupakan metode yang menggabungkan dua komponen kendali, yakni Linear Quadratic Regulator (LQR) dan estimator [GYORGY, K. 2019] dan dapat terlihat pada persamaan (9-10). Estimator sendiri berfungsi untuk memprediksi variabel state sistem dan mengurangi noise dan ketidakpastian. menggunakan informasi dari output sistem $((y))$ dan memperkirakan state aktual $((x))$. Noise pada output

$((y))$ dihilangkan atau dikurangi menggunakan matriks (L) .

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad (9)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du \quad (10)$$

dengan (L) : Matriks observer gain (disebut juga matriks Kalman).

4. PENGEMBANGAN MODEL KENDALI

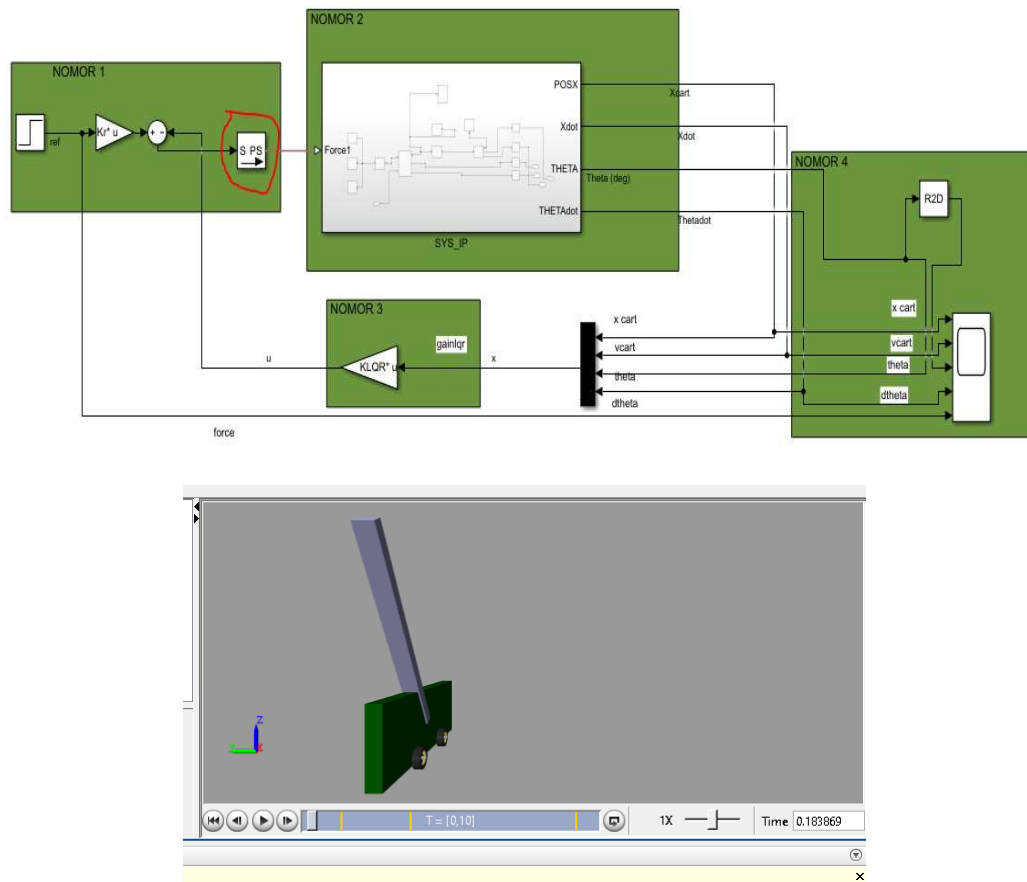
Studi ini merancang 4 model yang digunakan untuk membuat simulasi dan visualisasi kendali pendulum terbalik dengan metode LQG. Berikut adalah penjelasan lebih rinci mengenai masing-masing model:

4.1. Model Sistem LQR dengan Simulink

Model ini difokuskan pada analisis grafik, tabel, waktu naik (rise time), waktu penguasaan (settling time), dan sudut simpangan maksimum pendulum. Perancangan Simulink untuk kendali LQR memiliki input sistem yang berupa posisi yang diinginkan dan memberikan output pendulum tegak sekitar 0° pada posisi cart sesuai referensi.

Keterangan nomor bagan pada Gambar 2, berikut ini:

1. **Input Sistem (Nomor 1):**
Blok "Step" berfungsi untuk menentukan posisi yang diinginkan untuk kereta (cart). Blok "Kr" merupakan bagian dari sistem *feedforward* yang bertujuan untuk memperbaiki respons sistem. Nilai input akan dikoreksi dengan nilai error untuk menggerakkan sistem.
2. **Plant Sistem Inverted Pendulum (Nomor 2):**
Sistem dibangun dari model ruang keadaan pada persamaan (6-7). Bagian ini menerima input dan menghasilkan respons sistem dalam bentuk state "y".
3. **Kendali State Feedback (Nomor 3):**
Blok "KLQR" digunakan untuk mengendalikan posisi kereta (cart) dan sudut pendulum.



Gambar 3. Model sistem LQR dengan Simmechanics dan video visualisasinya

4. **Konversi Satuan Sudut (Nomor 4):**

Blok “Radians to Degrees (R2D)” berfungsi untuk mengubah satuan sudut pendulum dari radian menjadi derajat (°).

5. **Virtual Oscilloscope (Nomor 5):**

Bagian ini menampilkan respons sistem, khususnya posisi kereta (cart) dalam bentuk grafik trayektori posisi cart.

4.2. **Model Sistem LQR dengan Simmechanics**

Gambar 3 menunjukkan diagram blok model sistem kendali LQR dengan Simmechanics dan visualisasinya dengan menjalankan aplikasi simmechanics multibody. Pembuatan diagram blok 3 membutuhkan penambahan 2 blok, yaitu SPS Converter dan blok sistem pendulum terbalik menggunakan Simmechanics. Fungsi dari SPS Converter adalah untuk mengubah sinyal digital dari blok step menjadi sinyal fisik. Visualisasi sistem ditunjukkan dengan kamera virtual. Dinamika posisi kamera dapat ditentukan secara manual. Kamera yang sudah ada pada program adalah kamera bagian depan dan bagian atas. Video dapat di rekam menggunakan aplikasi screen capture atau dengan perintah save as video.

4.3. **Model Sistem LQG dengan Simulink**

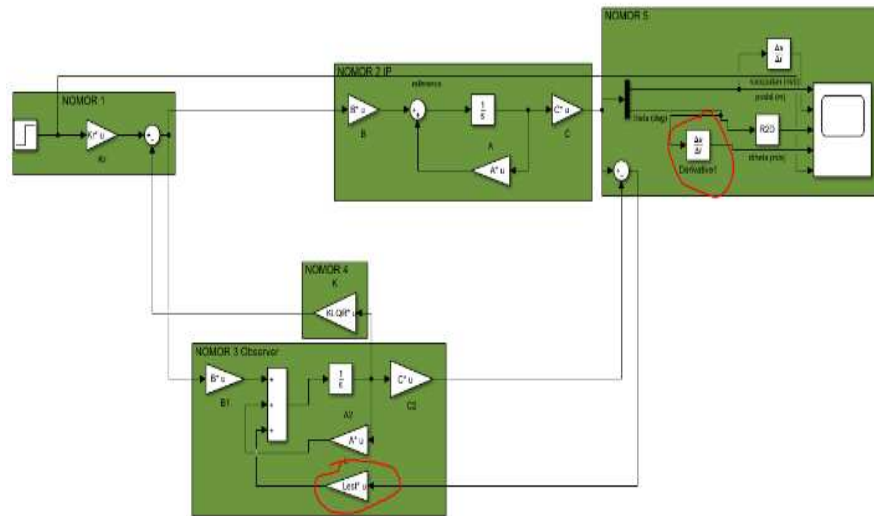
Tujuan dari perancangan ini adalah membuat sistem lebih tahan terhadap gangguan atau noise

memanfaatkan kendali LQG. Pada model ditambahkan blok derivatif atau turunan yang berfungsi memisahkan data posisi serta sudut menjadi kecepatan dan kecepatan sudut.

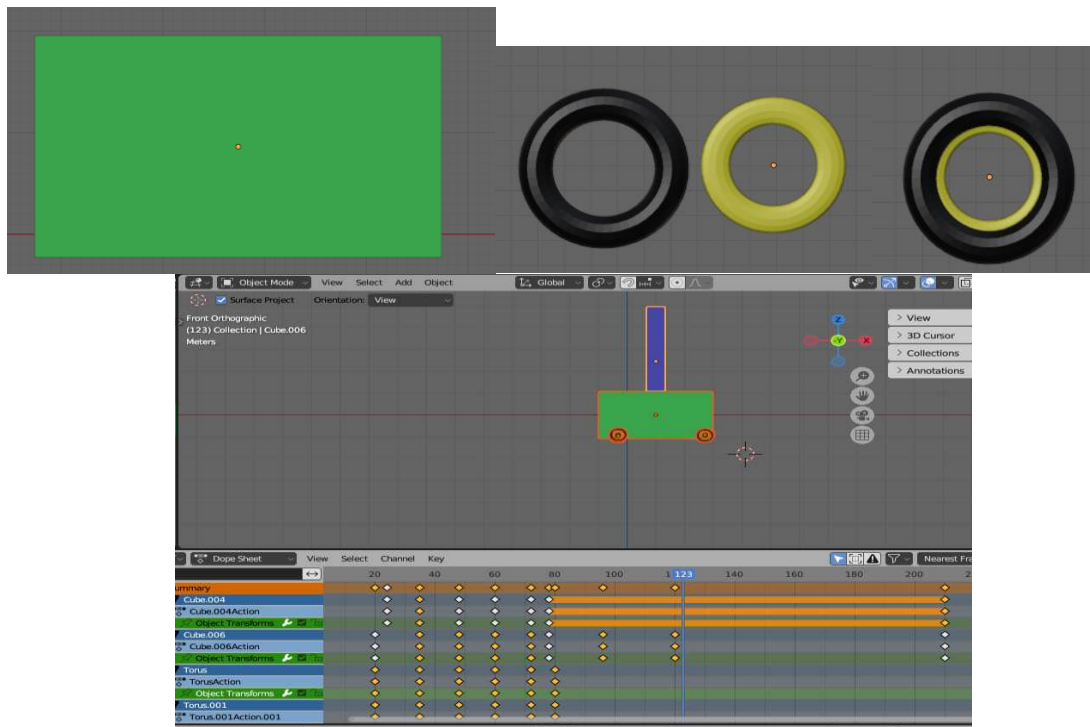
Pada bagian nomor 3 Gambar 4, terdapat blok gain Lest yang digunakan sebagai kendali feedback estimator. Lebih jelasnya, dituliskan berikut:

1. **Input Sistem (Nomor 1):** Bagian ini berfungsi sebagai input untuk sistem. Blok “Step” digunakan untuk menentukan posisi yang diinginkan untuk kereta (cart). Selain itu, blok “Kr” berperan sebagai bagian feedforward sistem yang memperbaiki respons sistem. Nilai input akan dikoreksi dengan nilai error untuk menggerakkan sistem.
2. **Plant System Inverted Pendulum (Nomor 2):** Bagian ini menerima nilai input dan menghasilkan respons sistem dalam bentuk state y. Plant sistem ini menggambarkan perilaku inverted pendulum.
3. **Estimator (Nomor 3):** Estimator digunakan untuk memprediksi nilai variabel state y. Dengan memprediksi state y, sistem menjadi lebih tahan terhadap gangguan. Hasil dari estimator adalah state estimasi \hat{x}

4.



Gambar 4. Model sistem LOG dengan Simulink



Gambar 5. Desain cart, pendulum, roda dan animasinya dengan Blender

Tabel 1. Pengujian Sudut pendulum metode LQR

No	Posisi Target/acuan cart	Kondisi awal [posisi ; kecepatan; sudut; kecepatan sudut]	Rise time (s)	Settling time (s)	Sudut maksimum (°)
1	-3	[0 m ; 0 m/s ; 0 ° ; 0°/s]	2,31	3,48	1,9
2	-5		2,24	3,56	3,2
3	-7		2,27	3,6	4,5
4	-9		2,28	3,62	5,7
5	-11		2,26	3,32	7
6	-13		2,3	3,33	8,4
7	-15		2,31	3,34	9,6
8	-17		2,31	3,39	10,9
9	-19		2,32	3,41	12
10	-21		2,34	3,45	13,4

Tabel 2. Pengujian Sudut pendulum metode LQG

No	Posisi Target /acuan catt(m)	Kondisi awal [posisi ; kecepatan; sudut; kecepatan sudut]	Rise time (s)	Settling time (s)	Sudut maksimum (°)
1	-3		2,31	2,44	1,9
2	-5		2,31	2,44	3,27
3	-7		2,31	2,44	4,51
4	-9		2,31	2,45	5,8
5	-11		2,31	2,45	7
6	-13	[0 m ; 0 m/s ; 0 ° ; 0°/s]	2,31	2,48	8,51
7	-15		2,31	2,52	9,8
8	-17		2,31	2,54	11,1
9	-19		2,32	2,54	12,4
10	-21		2,32	2,58	13,7

- Kendali State Feedback (Nomor 4):** Blok KLQR digunakan untuk mengendalikan posisi kereta (cart) dan sudut pendulum. Hasil dari pengendali ini akan dikurangi dengan input sistem untuk menghasilkan nilai error.
- Virtual Oscilloscope (Nomor 5):** Bagian ini berfungsi untuk menampilkan respons sistem. Respon yang ditampilkan meliputi posisi kereta (dalam meter), kecepatan kereta (dalam meter per detik), sudut pendulum (dalam derajat), dan kecepatan sudut pendulum (dalam derajat per detik).

Setelah dilakukan 10 kali pengujian dengan posisi target yang berbeda, maka didapatkan posisi cart paling stabil pada posisi -3 m dengan waktu 2,44 detik. Posisi -3 m dianggap posisi terbaik karena pada posisi -5 m terdapat nilai simpangan maksimum yang lebih besar yaitu 3,27°. Sistem pertama kali mencapai kestabilan pada waktu 2,31 detik. Pendulum berputar dengan simpangan maksimum bernilai 1,9°. Terlihat bahwa untuk sistem dengan LQG memberikan hasil lebih baik daripada LQR, lebih cepat stabil karena mempertimbangkan ketidakpastian sistem sementara pada desain LQR, tidak diketahui cara akurat menentukan bobot kendali [MAGHFIROH, H., NIZAM, M., ANWAR, M., MA'ARIF, A. 2022].

Sebagai tambahan, visualisasi aplikasi kendali LQR dengan Simmechanics dapat diakses pada tautan https://youtu.be/jD6bNWod_Q4 dan kendali LQG dengan Blender dapat dilihat pada tautan <https://youtu.be/sAALJP6yRe4>.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pengujian simulasi untuk mendapatkan kinerja metode kendali LQR dan LQG, dapat disimpulkan bahwa hasil pengujian posisi kendali metode LQG paling stabil terdapat pada posisi -3 m dengan waktu ajeg *rise time* 2,31 detik, *settling time* pada 2,44 detik dan sudut simpangan maksimum 1,9°. Dibandingkan dengan pengujian kendali LQR yang tidak mempertimbangkan *noise* dan gangguan, hasilnya sedikit berbeda terutama untuk acuan posisi *cart* selain -3 m. Dengan

demikian, studi ini membutuhkan desain kendali LQG memiliki kinerja yang lebih baik.

Selain itu, berbeda dengan yang sudah dilaporkan oleh sumber referensi lainnya, kami menyajikan visualisasi keberhasilan desain kendali optimal LQG dengan Simmechanic (Matlab) dan Blender Graph Editor, selain pengukuran kinerja secara analitik menggunakan Simulink.

DAFTAR PUSTAKA

- LIN, X., LIU, K., 2025. Design and implementation of multi-legged robot with dual drive: Gait and motion stability. *Journal of Engineering Research*, 13(2), pp. 874-884, <https://doi.org/10.1016/j.jer.2024.05.017>.
- MUSTARY, S., KASHEM, M.A., CHOWDHURY, M.A., RANA, Md.M., 2024. Mathematical model and evaluation of dynamic stability of industrial robot manipulator: Universal robot, *Systems and Soft Computing*, 6, 200071, <https://doi.org/10.1016/j.sasc.2023.200071>.
- DOZZA, M., LI, T., BILLSTEIN, L., and SYERNLOV, C. and RASCH, A., 2023. How do different micro-mobility vehicles affect longitudinal control? Results from a field experiment. *Journal of Safety Research*, 84, pp. 24-32. <https://doi.org/10.1016/j.jsr.2022.10.005>
- GALE-CAZAN, C-B., BOJAN-DRAGOS, C-A, PRECUP, R-E., ROMAN, R-C., PETRIU, E.M., SZEDLAK-STINEAN, A-I. 2022. GWO-based Modeling of an Unstable Transport System. *Procedia Computer Science*, 214, pp. 195-202, <https://doi.org/10.1016/j.procs.2022.11.166>.
- MIHALIK, M., BUJNAK, M., and SIMAK, V., 2021. Two-wheel electric chassis with automatic balancing. *Transportation Research Procedia*, 55, pp. 1026-1033. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2021.07.074>
- ZHANG, C., LIU, T., SONG, S., WANG, J., and MENG, M.Q.-H. 2022. Dynamic wheeled motion control of wheel-biped transformable robots. *Biomimetic*

- Intelligence and Robotics, 2(2), 100027, <https://doi.org/10.1016/j.birob.2021.100027>
- OLOO, J. 2023, Effect of loss of control effectiveness on an inverted pendulum balanced on a moving quadrotor. *Heliyon*, 9(3), e14494, <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e14494>.
- CHACKO, S.J., NEERAJ, P.C., and ABRAHAM, R.J. 2024. Optimizing LQR controllers: A comparative study. *Results in Control and Optimization*, 14, 100387, <https://doi.org/10.1016/j.rico.2024.100387>.
- RIZKI, A.S., PANGARIBUAN, P., and WIBOWO, A.S. 2018. Perancangan Sistem Kendali untuk Kestabilan Pendulum Terbalik. e-Proceeding of Engineering, Universitas Telkom Bandung.
- MAGDY, M., EL MARHOMY, A., and ATTIA, M.A., 2019. Modeling of inverted pendulum system with gravitational search algorithm optimized controller. *Ain Shams Engineering Journal*, 10(1), pp. 129-149, <https://doi.org/10.1016/j.asej.2018.11.001>.
- FAHMIZAL, NUGROHO, H.A, CAHYADI, A.I., ARDIYANTO, I., 2024. Attitude control of UAV bicopter using adaptive LQG, *Results in Control and Optimization*, 17, 100484, <https://doi.org/10.1016/j.rico.2024.100484>.
- U. KRUTHIKA, U., PANEERSELVAM, S., 2025. Enhanced set-point tracking in a Boiler Turbine System via decoupled MIMO linearization and comparative LQR-based control strategy. *Results in Engineering*, 25, 103914, <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.103914>.
- HAWARI, Q., KIM, T., WARD, C., FLEMING, J., 2023. LQG control for hydrodynamic compensation on large floating wind turbines, *Renewable Energy*, 205, pp. 1-9, <https://doi.org/10.1016/j.renene.2023.01.067>.
- GYORGY, K. 2019. The LQG Control Algorithms for Nonlinear Dynamic Systems. *Procedia Manufacturing*, 32, pp. 553-563, <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2019.02.252>.
- MAGHFIROH, H., NIZAM, M., ANWAR, M., MA'ARIF, A. 2022. Improved LQR Control Using PSO Optimization and Kalman Filter Estimator. *IEEE Access*, 10, pp. 18330-18337, <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3149951>.

Halaman ini sengaja dikosongkan