JMS, Tahun, Vol. 1 (No. 2), pp. 81-86
Jurnal Matematika & Sains
Kompleks YPP Al Fattah Siman Sekaran Lamongan

BEBERAPA TEOREMA TITIK TETAP UNTUK PEMETAAN KONTINU DI RUANG METRIK KOMPAK

Ahmad Khairul Umam[1*], Ahmad Isro'il[2], Pukky Tetralian B. N.[3]
[1,2,3] Program Studi Matematika Universitas Billfath
Corresponding Author: *ahmad.khairul.umam@gmail.com[*]*

Abstract

The fixed point principle is very important in solving linear equation, ordinary differential equation, partial differential equation, and integral equation. The famous fixed point theorem is Banach's fixed point theorem. Kannan's fixed point theorem is generalisation of Banach's fixed point theorem. This article discusses some theorems that generalisations from Kannan's fixed point theorem with continuity mapping. Some theorems are discussed in this article guarantee the existence and uniqueness of a fixed point.

Keywords: *Fixed Point; Kannan's Mapping; Compact Metric Space*

How to cite: Ahmad Khairul Umam, Ahmad Isro'il, & Pukky Tetralian B. N. (2021). Beberapa Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan Kontinu di Ruang Metrik Kompak. *JMS (Jurnal Matematika dan Sains)*, *1*(2), pp.81-86.

PENDAHULUAN

Seiring perkembangan zaman, konsep titik tetap telah banyak dibahas oleh para peneliti. Dalam mempelajari titik tetap, tidak lupa juga mempelajari tentang ruang metrik. Ruang metrik merupakan pasangan suatu himpunan dan fungsi jarak d dengan terpenuhinya beberapa aksioma. Ruang metrik yang penting juga yaitu ruang metrik kompak.

Menurut (Bhardwaj, 2008), suatu sub koleksi dari suatu cover terbuka yang setidaknya merupakan cover terbuka disebut sub cover. Ruang kompak adalah ruang dimana setiap cover terbukanya memiliki sub cover berhingga.

Pemetaan f di ruang metrik (X, d) disebut Kannan jika terdapat $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sedemikian sehingga $d\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha d\big(x, f(x)\big) + \alpha d\big(y, f(y)\big)$ untuk setiap $x, y \in X$. Menurut (Kannan, 1969) Jika X lengkap maka pemetaan Kannan memiliki titik tetap.

Pada makalah ini membahas beberapa teorema yang berkaitan dengan pemetaan Kannan yang kontinu. Ruang metrik yang dipilih adalah ruang metrik kompak yaitu ruang metrik dimana setiap cover terbukanya memiliki sub cover berhingga. Tujuan dan manfaat dari penelitian ini adalah untuk mengetahui teorema titik tetap untuk pemetaan Kannan dan mengetahui beberapa teorema titik tetap pemetaan kontinu di ruang metrik kompak.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka. Pelaksanaan penelitian ini dilakukan selama 1 tahun, yaitu dari bulan Agustus 2020 sampai bulan Juli 2021 di Lamongan. Tahapan-tahapan dari penelitian ini yaitu: pencarian jurnal utama penelitian, pencarian beberapa pustaka yang relevan dengan penelitian, pembahasan tentang penelitian-penelitian sebelumnya yang berhubungan dengan penelitian ini, pembuktian teorema-teorema penelitian.

Pada penelitian ini tidak menggunakan data karena berupa studi pustaka. Penelitian ini membahas tentang teorema-teorema baru. Pembuktian teorema dilakukan guna memperkuat kebenaran dari teorema-teorema baru tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 1. Misalkan $X=(X,d)$ dan $Y=(Y,d)$ merupakan ruang metrik. Pemetaan $f: X\rightarrow Y$ dikatakan kontinu pada suatu titik $x_0\in X$ jika untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga

$$d\big(f(x),f(x_0)\big)<\varepsilon$$

untuk setiap x yang memenuhi

$$d(x,x_0)<\delta.$$

Pemetaan f dikatakan kontinu di X jika f kontinu disetiap titik pada X (Kreyszig, 1978).

Definisi 2. Diberikan ruang metrik (X,d), $E\subset X$, dan $\mathcal{G}=\{G_\alpha|\alpha\in I\}$ adalah keluarga semua himpunan bagian terbuka dari X. Keluarga $\mathcal{G}$ dikatakan selimut terbuka untuk himpunan E jika untuk setiap $x\in E$ terdapat $\alpha\in I$ sehingga $x\in G_\alpha$ (Muslikh, 2012).

Definisi 3. Diberikan ruang metrik (X,d) dan $K\subset X$. Himpunan K disebut himpunan kompak (*compact*) jika selimut terbuka untuk K memuat sub-selimut berhingga yang masih menyelimuti K (Muslikh, 2012).

Definisi 4. Diberikan ruang metrik (X,d) dan suatu pemetaan $f: X\rightarrow X$. Titik $x\in X$ disebut titik tetap f jika $x=f(x)$ (Takashi dan Hiroyuki, 2010).

Definisi 5. Misalkan ruang metrik (X, d). Pemetaan $f: X \to X$ dinamakan pemetaan kontraksi, jika ada suatu bilangan real c dengan $0 \leq c < 1$ sedemikian sehingga :

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq cd(x, y), \forall x, y \in X$$ (Kreyszig,1978).

Teorema 1 (Titik Tetap Banach). Misalkan (X, d) adalah ruang metrik lengkap. Jika $f: X \to X$ adalah pemetaan kontraksi pada X, maka f mempunyai titik tetap yang tunggal (Kreyszig, 1978).

Proposisi 1. Diberikan ruang metrik (X, d) dan pemetaan kontinu $f : X \to \mathbb{R}$. Maka $f(x)$ terbatas dan terdapat titik $a, b \in X$ sedemikian sehingga $f(a) = \operatorname*{Inf}_{x \in X} f(x)$ dan $f(b) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} f(x)$.

Teorema 2. Diberikan (X, d) adalah ruang metrik kompak dan $f : X \to X$ adalah suatu pemetaan. Jika $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, maka f memiliki titik tetap tunggal (Górnicki, 2017).

Teorema 3. Diberikan (X, d) adalah ruang metrik kompak dan $f : X \to X$ adalah suatu pemetaan kontinu. Jika $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{2}\big[d\big(x, f(x)\big) + d\big(y, f(y)\big)\big]$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, maka f memiliki titik tetap tunggal.

Bukti

Himpunan selang tertutup $A = [0,1]$ adalah himpunan kompak. Diberikan pemetaan kontinu $f : [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = c$ dimana $c \in [0,1]$. Karena f adalah pemetaan kontinu maka $d(x, f(x)) \geq 0$, jadi pemetaan $g(x) = d(x, f(x))$ juga pemetaan kontinu. Karena (X, d) adalah ruang metrik kompak dan pemetaan g sama dengan d maka terdapat $x \in X$ sehingga $g(x) = \text{Inf}\{g(x) | x \in X\}$.

Akan dibuktikan bahwa pemetaan f memiliki titik tetap. Titik $x \in X$ disebut titik tetap f jika $x = f(x)$. Misalkan x bukan titik tetap $f(x)$ sehingga $x \neq f(x)$, maka

$$\begin{aligned} d(f(x), f[f(x)]) &< \frac{1}{2}\big[d\big(x, f(x)\big) + d(f(x), f[f(x)])\big] \\ &= \frac{1}{2} d\big(x, f(x)\big) + \frac{1}{2} d(f(x), f[f(x)]) \end{aligned}$$

Nilai dari $f(x) = c$ dimana $c \in [0,1]$. Karena $c \in [0,1]$, maka $f[f(x)] = f(c) = c$. Sehingga pertidaksamaan menjadi

$$\begin{aligned}
d(f(x), f[f(x)]) &< \frac{1}{2} d\big(x, f(x)\big) + \frac{1}{2} d(f(x), f[f(x)]) \\
&= \frac{1}{2} d\big(x, f(x)\big) + \frac{1}{2} d(c, c) \\
&= \frac{1}{2} d\big(x, f(x)\big) + 0 \\
&< \frac{1}{2} d\big(x, f(x)\big) + \frac{1}{2} d\big(x, f(x)\big) \\
&= d\big(x, f(x)\big)
\end{aligned}$$

dimana $f : X \to X$. Menurut teorema 2 maka pemetaan f memiliki titik tetap yang tunggal atau titik tetapnya bisa ditulis $x = f(x)$. Hal ini kontradiksi dengan $x \neq f(x)$. Jadi f memiliki titik tetap yang tunggal.

Teorema 4. Diberikan (X, d) adalah ruang metrik kompak dan $f : X \to X$ adalah suatu pemetaan kontinu. Jika

$$d(f(x), f(y)) < Ad\big(x, f(x)\big) + Bd\big(y, f(y)\big) + Cd(x, y)$$

untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$ dimana A, B, C adalah bilangan positif yang memenuhi $A + B + C = 1$, maka f memiliki titik tetap tunggal.

Bukti

Himpunan selang tertutup $A = [0,1]$ adalah himpunan kompak. Diberikan pemetaan kontinu $f : [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = c$ dimana $c \in [0,1]$. Karena f adalah pemetaan kontinu maka $d(x, f(x)) \geq 0$, jadi $g(x) = d(x, f(x))$ juga pemetaan kontinu. Karena (X, d) adalah ruang metrik kompak dan pemetaan g sama dengan d maka terdapat $x \in X$ sehingga $g(x) = \text{Inf}\{g(x) | x \in X\}$.

Akan dibuktikan bahwa pemetaan f memiliki titik tetap. Titik $x \in X$ disebut titik tetap f jika $x = f(x)$. Misalkan x bukan titik tetap $f(x)$ sehingga $x \neq f(x)$, maka

$$d(f(x), f[f(x)]) < Ad\big(x, f(x)\big) + Bd(f(x), f[f(x)]) + Cd\big(x, f(x)\big)$$

Nilai dari $f(x) = c$ dimana $c \in [0,1]$. Karena $c \in [0,1]$, maka $f[f(x)] = f(c) = c$. Sehingga pertidaksamaan menjadi

$$\begin{aligned}
d(f(x), f[f(x)]) &< Ad\big(x, f(x)\big) + Bd(f(x), f[f(x)]) + Cd\big(x, f(x)\big) \\
&= Ad\big(x, f(x)\big) + Bd(c, c) + Cd\big(x, f(x)\big) \\
&= Ad\big(x, f(x)\big) + 0 + Cd\big(x, f(x)\big)
\end{aligned}$$

$$= Ad\big(x, f(x)\big) + Cd\big(x, f(x)\big)$$

Karena $A + B + C = 1$ dan A, B, C adalah bilangan positif, maka $A + C < 1$. Selanjutnya pertidaksamaan menjadi

$$\begin{aligned} d(f(x), f[f(x)]) &< Ad\big(x, f(x)\big) + Cd\big(x, f(x)\big) \\ &= (A + C)d\big(x, f(x)\big) \\ &< d\big(x, f(x)\big) \end{aligned}$$

dimana $f : X \to X$. Menurut teorema 2 maka pemetaan f memiliki titik tetap yang tunggal atau titik tetapnya bisa ditulis $x = f(x)$. Hal ini kontradiksi dengan $x \neq f(x)$. Jadi f memiliki titik tetap yang tunggal.

SIMPULAN DAN SARAN

Teorema titik tetap Kannan merupakan perluasan dari teorema titik tetap Banach. Pada penelitian ini dibahas beberapa teorema perluasan dari teorema titik tetap Kannan dengan pemetaan kontinu. Teorema titik tetap Banach menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan $f: X \to X$ jika ada suatu bilangan real c dengan $0 \leq c < 1$ sedemikian sehingga $d\big(f(x), f(y)\big) \leq cd(x, y), \forall x, y \in X$ pada ruang metrik (X, d) yang lengkap.

Teorema titik tetap Kannan juga menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan $f: X \to X$ jika terdapat $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sedemikian sehingga $d\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha d\big(x, f(x)\big) + \alpha d\big(y, f(y)\big)$ untuk setiap $x, y \in X$ pada ruang metrik (X, d) yang lengkap.

Untuk kesimpulan dari hasil pembahasan yaitu: pertama, teorema 3 menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan kontinu $f : X \to X$ jika $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{2}\left[d\big(x, f(x)\big) + d\big(y, f(y)\big)\right]$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$ pada ruang metrik (X, d) yang kompak. Kedua, teorema 4 menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan kontinu $f : X \to X$ jika $d(f(x), f(y)) < Ad\big(x, f(x)\big) + Bd\big(y, f(y)\big) + Cd(x, y)$ untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$ dimana A, B, C adalah bilangan positif yang memenuhi $A + B + C = 1$ pada ruang metrik (X, d) yang kompak.

Saran dari penelitian ini adalah perlu lebih banyak lagi yang mempelajari tentang topik titik tetap. Selain itu perlu juga mengaitkan secara langsung teorema titik tetap dengan aplikasinya.

DAFTAR RUJUKAN

Bhardwaj, R., Rajput S. S., Choudhary, S., & Yadava, R. N. (2008). Some Fixed Point Theorems in Compact Metric Spaces. *Int. Journal of Math. Analysis, 2*(12), 551-555.

Górnicki, J. (2017). Fixed Point Theorems for Kannan Type Mappings. *Journal of Fixed Point Theory and Applications, 19*, 2147.

Kannan, R. (1969). Some Results on Fixed Points - II. *The American Mathematical Monthly, 76*, 405-408.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Aplication*. John Wiley and Sons, Inc. Canada.

Muslikh, M. (2012). *Analisis Real*. Malang. UB Press.

Takashi, S., & Hiroyuki, Y. (2010). *Introduction to Mathematical Science Model*. Tokyo. Baifukan.