JRMM–Jurnal Riset Mahasiswa Matematika, Volume 5 (3) (2026), Pages 205-210

Research Article

Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan *Hybrid* Diperumum di Ruang Hilbert atas ℝ

Firman Riansyah[1]

[1] *Program Studi Tadris Matematika, Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan, Institut Agama Islam Negeri Kendari, Indonesia*

Article History

Received 12 Januari 2026
Revised 13 Februari 2026
Accepted 23 Februari 2026
Published 28 Februari 2026

Check for updates

Abstract. This research investigates the existence of fixed points for generalized hybrid mappings in a Hilbert space in ℝ. Let C be a nonempty, closed, and convex subset of a Hilbert space in ℝ, and let $T : C \to C$ be a generalized hybrid mapping. It is shown that if there exists $x \in C$ such that the sequence $\{T^n(x)\}$ is bounded, then, by employing the Banach limit, it can be proven that T has a fixed point. Furthermore, if for every sequence in C the difference between each element and its image under the mapping converges to zero and the sequence converges weakly to some element in C, then the weak limit element is a fixed point of T. These results emphasize the crucial role of the Banach limit in ensuring the existence of fixed points for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces in ℝ.

Keywords: fixed point theorems; generalized hybrid mapping; Banach limit

Abstrak. Penelitian ini mengkaji eksistensi titik tetap bagi pemetaan *Hybrid* diperumum pada ruang Hilbert atas ℝ. Misalkan C adalah himpunan tak kosong, konveks, dan tertutup dalam ruang Hilbert atas ℝ, serta T suatu pemetaan *Hybrid* diperumum. Ditunjukkan bahwa apabila terdapat $x \in C$ sehingga $\{T^n x\}$ terbatas, maka dengan menggunakan Limit Banach dapat dibuktikan bahwa T memiliki titik tetap. Selain itu, jika untuk setiap barisan dalam C berlaku bahwa selisih antara elemen dan hasil pemetaannya menuju nol serta barisan tersebut konvergen lemah ke suatu elemen di C, maka elemen limit tersebut merupakan titik tetap dari T. Hasil ini menegaskan peran penting Limit Banach dalam menjamin eksistensi titik tetap bagi pemetaan *Hybrid* diperumum di ruang Hilbert atas ℝ.

Kata kunci: teorema titik tetap; pemetaan *hybrid* diperumum; limit Banach.

1. Pendahuluan

Teori titik tetap merupakan salah satu teori yang mempunyai banyak aplikasi pada bidang lain diantaranya masalah ekuilibrium. Browder dan Goebel and Kirk mengembangkan teorema titik tetap pada pemetaan yang lebih umum dari pada pemetaan kontraksi, yaitu pemetaan nonekspansif. Salah satu contoh pemetaan nonekspansif adalah pemetaan *firmly nonexpansive* [1], [2]. Pada penelitian [3] menyatakan bahwa jika (X, d) ruang metrik dan $T : X \to X$ maka pemetaan T dikatakan nonekspansif jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$. Kohsaka and Takahashi dan Takahashi berturut-turut memperkenalkan suatu pemetaan nonlinear yang berbeda dari pemetaan nonekspansif yakni pemetaan nonspreading dan pemetaan *Hybrid* yang merupakan perumuman dari pemetaan firmly nonexpansive [4], [5]. Selanjutnya Kocourek et al. memperkenal pemetaan *Hybrid* diperumum yang merupakan perumuman dari pemetaan nonekspansif, nonspreading, dan *Hybrid* [6].

Teorema titik tetap pada pemetaan nonlinear sangat erat kaitannya dengan barisan terbatas. Conway[6] menyatakan limit Banach merupakan suatu fungsional linear yang memetakan suatu barisan terbatas ke suatu bilangan real yang memenuhi tiga aksioma yaitu jika untuk setiap $x, y \in \ell^\infty$ dengan $x = (x_n)$ dan $y = (y_n)$ memenuhi:

1. $L(x) \geq 0$ jika $x_n \geq 0$,
2. jika $x_n \to \ell$ maka $L(x) = \ell$,
3. $L(Sx) = L(x)$ dengan S shift operator yang didefinisikan $(Sx)_n = x_{n+1}$,
4. jika x adalah barisan konvergen maka $L(x) = \lim x_n$.

Berdasarkan keterkaitan antara teorema titik tetap dan barisan terbatas dan kekonvergenan lemah barisan maka pada tulisan ini akan dibuktikan eksistensi teorema titik tetap pada pemetaan *Hybrid* diperumum di ruang Hilbert atas ℝ dengan menggunakan limit Banach.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi literatur yang bersifat teoritis. Tahapan-tahapan penelitian ini sebagai berikut:

1. Mempelajari sifat-sifat berlaku di ruang Hilbert atas ℝ, limit Banach, dan Lemma yang menghubungkan barisan terbatas, limit Banach, dan nilai minimum dari suatu pemetaan.
2. Mempelajari barisan terbatas dan keterkaitannya dengan limit Banach untuk menyelidiki titik tetap pada pemetaan *Hybrid* diperumum di ruang Hilbert atas ℝ.
3. Mempelajari kekonvergenan lemah suatu barisan dan keterkaitannya dengan limit Banach untuk menyelidiki titik tetap pada pemetaan *Hybrid* diperumum di ruang Hilbert atas ℝ.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Beberapa sifat pada ruang Hilbert dan Definisi Limit Banach

Bagian ini akan dipaparkan mengenai teorema titik tetap menggunakan limit Banach. Sebelumnya, terlebih dahulu diberikan beberapa konsep tambahan yang akan aplikasikan dalam pembuktian eksistensi titik tetap di ruang Hilbert atas ℝ [8], [9], [10].

Corresponding author's email: firmanriansyah@iainkendari.ac.id
DOI: https://doi.org/10.18860/JRMM.v5i3.41145 / p-ISSN: 2086-0382 | e-ISSN: 2477-3344 (BRIN | ISSN Portal)

Teorema 1

Diberikan H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$ dengan inner product $\langle .,. \rangle$ dan norma $\| \cdot \| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$, maka berlaku

1. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$.
2. $\|ax + (1-a)y\|^2 = a\|x\|^2 + (1-a)\|y\|^2 - a(1-a)\|x-y\|^2, \forall x, y \in H$ *dan* $a \in \mathbb{R}$.
3. $2\langle z-y, z-w\rangle = \|x-w\|^2 + \|y-z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-w\|^2 \quad \forall w, x, y, z \in H$.

Karena setiap ruang Hilbert merupakan ruang bernorma maka kita membahas beberapa sifat pada ruang bernorma, terkhusus pada barisan konvergen dan konvergen lemah pada ruang bernorma [11], [12], [13].

Definisi 1

Diberikan ruang bernorma $(X, \| \cdot \|)$ dan X' ruang dualnya. Barisan $\{x_n\}$ di X dikatakan konvergen lemah ke $x \in X$ jika untuk setiap $f \in X'$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Barisan $\{x_n\}$ yang konvergen lemah ke x dinotasikan dengan $x_n \rightharpoonup x$ dan x disebut limit lemah barisan $\{x_n\}$.

Hubungan antara barisan konvergen dan barisan konvergen lemah lebih lanjut dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 2

Diketahui X ruang bernorma dan barisan $\{x_n\} \subseteq X$. Jika $x_n \to x$ maka $x_n \rightharpoonup x$.

Setelah memperkenalkan beberapa sifat di ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$. Selanjutnya, diberikan definisi limit Banach dapat ditemukan pada [14] dan [7] yang nantinya akan digunakan dalam pembuktian eksistensi titik tetap di ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$. Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari limit Banach.

Definisi 2

Fungsional linear $\mu : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ disebut limit Banach jika untuk setiap $x, y \in \ell^\infty$ dan $a \in \mathbb{R}$ dengan $x = \{x_n\}$ dan $y = \{y_n\}$ memenuhi:

1. $\mu(ax + y) = a\mu(x) + \mu(y)$
2. Jika $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ maka $\mu(x) \geq 0$.
3. $\mu(x) = \mu(Sx)$ dengan S shift operator yang didefinisikan $(Sx)_n = x_{n+1}$.
4. Jika x adalah barisan konvergen maka $\mu(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Contoh 1

Didefinisikan:

$$\mu : \ell^\infty \to \mathbb{R}$$

dengan

$$x \mapsto \lim_{N\to\infty} G_N(x),\ \forall x = \{x_n\} \in \ell^\infty$$

untuk

$$G_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n, \quad \forall x = \{x_n\} \in \ell^\infty$$

Berikut ini lemma mengenai eksistensi ketunggalan peminimum suatu fungsi dengan menghubungkan antara barisan terbatas di ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$ dan limit Banach.

Lema 1

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong, barisan $\{x_n\}$ terbatas di dalam H dan μ adalah limit Banach. Jika $g : C \to \mathbb{R}$ dengan

$$g(z) = \mu(\|x_n - z\|^2), \quad \forall z \in C$$

maka terdapat dengan tunggal $z_0 \in C$ sehingga

$$g(z_0) = \min\{g(z) : z \in C\}.$$

Ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$ yang terdapat himpunan C yang bersifat konveks, tertutup, dan tidak kosong dan diberikan suatu T yang memetakan setiap elemen di dalam C ke elemen lain yang juga berada di dalam C. Apabila terdapat $x \in C$ sehingga barisan $\{T^n(x)\}$ terbatas, maka dengan menggunakan Lemma 1 dan Limit Banach dapat menjamin eksistensi titik tetap pada pemetaan tersebut.

Teorema 3

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong dan pemetaan $T : C \to C$. Jika terdapat $x \in C$ sehingga $\{T^n(x)\}$ terbatas dan untuk suatu limit Banach μ berlaku

$$\mu(\{\|T^n(x) - T(y)\|^2\}) \leq \mu(\{\|T^n(x) - y\|^2\}), \quad \forall y \in C$$

maka T memiliki titik tetap.

Bukti

Untuk suatu Banach limit μ, didefinisikan pemetaan $g : C \to \mathbb{R}$ dengan

$$g(z) = \mu\big(\{\|T^n(x) - z\|^2\}_{n\geq 0}\big), \quad \forall z \in C.$$

Berdasarkan Lemma 1, terdapat tunggal $z_0 \in C$ sehingga $g(z_0) = \min\{g(z) : z \in C\}$.
Di lain pihak,

$$\begin{aligned} g\big(T(z_0)\big) &= \mu\big(\{\|T^n(x) - T(z_0)\|^2\}_{n\geq 0}\big) \\ &\leq \mu\big(\{\|T^n(x) - z_0\|^2\}_{n\geq 0}\big) \\ &= g(z_0). \end{aligned}$$

Jadi, $g\big(T(z_0)\big) \leq g(z_0)$.
Karena $z_0 \in C$ merupakan elemen tunggal sehingga $g(z_0) = \min\{g(z) : z \in C\}$ dan $T(z_0) \in C$, maka $g(z_0) \leq g\big(T(z_0)\big)$. Karena $g\big(T(z_0)\big) \leq g(z_0)$ dan

$g(z_0) \le g\big(T(z_0)\big)$, maka $g(z_0) = g\big(T(z_0)\big)$. Karena z_0 peminimum g dan $T(z_0)$ juga memberikan nilai minimum yang sama pada g, maka berdasarkan Lemma 1 berlaku $T(z_0) = z_0$. Dengan demikian, T memiliki titik tetap. □

Berikut teorema yang mengaitkan ruang Hilbert dengan suatu pemetaan. Teorema dibutuhkan dalam pembuktikan teorema titik tetap, terkhusus pada pemetaan nonliner di ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$.

Teorema 4

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$. Jika $C \subseteq H$ himpunan tak kosong dan pemetaan $T : C \to H$ maka untuk setiap $x, y \in C$ berlaku

1. $\|T(x) - T(y)\|^2 \le \|x - y - (T(x) - T(y))\|^2 - \|x - y\|^2 + 2\langle x - y, T(x) - T(y)\rangle$
2. $2\langle x - y, T(x) - T(y)\rangle = \|x - T(y)\|^2 + \|y - T(x)\|^2 - \|x - T(x)\|^2 - \|y - T(y)\|^2$
3. $\|x - y - (T(x) - T(y))\|^2 \le \|x - T(y)\|^2 + \|y - T(x)\|^2 - 2\langle x - T(x), y - T(y)\rangle$.

3.2. Teorema Titik Tetap Pemetaan *Hybrid* diperumum

Bagian ini akan dipaparkan mengenai definisi pemetaan *hybrid* diperumum [6]. Lebih lanjut, dengan mempelajari keterkaitan antara barisan terbatas dan limit Banach akan diselidiki eksistensi titik tetap pada pemetaan *hybrid* diperumum di ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$.

Definisi 3

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$ dan $C \subseteq H$ himpunan tak kosong. Pemetaan $T : C \to H$ dikatakan pemetaan *hybrid* diperumum jika terdapat $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\begin{aligned}&\alpha\|T(x) - T(y)\|^2 + (1-\alpha)\|x - T(y)\|^2\\ &\quad\le \beta\|T(x) - y\|^2 + (1-\beta)\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C.\end{aligned}$$

Lebih lanjut, pemetaan *hybrid* diperumum dengan suatu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ disebut (α, β)-hybrid diperumum.

Contoh 2

Pemetaan $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $T(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Pemetaan T merupakan pemetaan *hybrid* diperumum dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $\beta = \frac{1}{2}$.

Berikut teorema eksistensi titik tetap dengan menggunakan keterkaitan barisan terbatas dan limit Banach.

Teorema 5

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong dan $T : C \to C$ pemetaan hybrid diperumum. Jika terdapat $x \in C$ sehingga $\{T^n(x)\}$ terbatas maka T memiliki titik tetap.

Bukti

Diketahui terdapat $x \in C$ sehingga $\{T^n(x)\}$ terbatas. Karena $\{T^n(x)\}$ terbatas maka, untuk setiap $z \in C$, $\{\|T^n(x) - z\|^2\}$ terbatas. Karena T pemetaan *hybrid* diperumum berarti terdapat $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $y \in C$ berlaku

$$\begin{aligned}&\alpha\|T^{n+1}(x) - T(y)\|^2 + (1-\alpha)\|T^n(x) - T(y)\|^2\\ &\quad\le \beta\|T^{n+1}(x) - y\|^2 + (1-\beta)\|T^n(x) - y\|^2.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan limit Banach μ pada ℓ^∞ diperoleh, untuk setiap $y \in C$ berlaku

$$\begin{aligned}\mu(\{\|T^n(x) - T(y)\|^2\}) &= \alpha\mu(\{\|T^n(x) - T(y)\|^2\})\\ &\quad+ (1-\alpha)\mu(\{\|T^n(x) - T(y)\|^2\})\\ &= \alpha\mu(\{\|T^{n+1}(x) - T(y)\|^2\})\\ &\quad+ (1-\alpha)\mu(\{\|T^n(x) - T(y)\|^2\})\\ &= \mu(\{\alpha\|T^{n+1}(x) - T(y)\|^2\\ &\quad+ (1-\alpha)\|T^n(x) - T(y)\|^2\})\\ &\le \mu(\{\beta\|T^{n+1}(x) - y\|^2\\ &\quad+ (1-\beta)\|T^n(x) - y\|^2\})\\ &= \mu(\{\beta\|T^{n+1}(x) - y\|^2\})\\ &\quad+ \mu(\{(1-\beta)\|T^n(x) - y\|^2\})\\ &= \beta\mu(\{\|T^{n+1}(x) - y\|^2\})\\ &\quad+ (1-\beta)\mu(\{\|T^n(x) - y\|^2\})\\ &= \beta\mu(\{\|T^n(x) - y\|^2\})\\ &\quad+ (1-\beta)\mu(\{\|T^n(x) - y\|^2\})\\ &= \mu(\{\|T^n(x) - y\|^2\})\end{aligned}$$

Jadi, untuk suatu limit Banach μ berlaku

$$\mu(\{\|T^n(x) - T(y)\|^2\}) \le \mu(\{\|T^n(x) - y\|^2\}), \quad \forall y \in C.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3, T memiliki titik tetap. □

3.3. Kaitan Pemetaan *hybrid* Diperumum dan Kekonvergenan Lemah Barisan.

Bagian ini akan dipaparkan keterkaitan antara kekonvergenan lemah suatu barisan dan limit Banach yang akan digunakan untuk menyelidiki eksistensi titik tetap pada pemetaan *hybrid* diperumum di ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$.

Keterkaitan kekonvergenan lemah suatu barisan dan limit Banach dalam menjamin eksistensi titik tetap pada pemetaan *hybrid* diperumum dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 6

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong dan $T : C \to C$ pemetaan *hybrid diperumum. Jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subseteq C$, $x_n - T(x_n) \to 0$ dan terdapat $u \in C$ sehingga $x_n \rightharpoonup u$ maka $u = T(u)$.*

Bukti

Diambil sebarang barisan $\{x_n\} \subseteq C$ dengan $x_n - T(x_n) \to 0$ dan $x_n \rightharpoonup u$. Karena H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$ maka H ruang Banach atas $\mathbb{R}$ terhadap $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Karena $x_n \rightharpoonup u$ maka $\{\|x_n\|\}$ terbatas. Karena $x_n - T(x_n) \to 0$ maka berdasarkan Teorema 3.1.3, $x_n - T(x_n) \rightharpoonup 0$. Karena $x_n - T(x_n) \to 0$ maka $\{\|x_n - T(x_n)\|\}$ terbatas. Karena $\{\|x_n\|\}$ dan $\{\|x_n - T(x_n)\|\}$ terbatas maka $\{\|T(x_n)\|\}$ terbatas. Karena $\{\|x_n\|\}$, $\{\|T(x_n)\|\}$, dan $\{\|x_n - T(x_n)\|\}$ terbatas maka $\{x_n\}$, $\{T(x_n)\}$, dan $\{x_n - T(x_n)\}$ terbatas. Akibatnya, untuk setiap $z \in C$, $\{\|x_n - z\|^2\}$ dan $\{\|T(x_n) - z\|^2\}$ terbatas. Lebih lanjut, $\{\langle T(x_n) - x_n, x_n - T(u)\rangle\}$ juga terbatas. Karena T pemetaan *hybrid* diperumum maka terdapat $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sehingga

$$\begin{aligned}&\forall n \in \mathbb{N},\, y \in C,\\ &\alpha\|T^{n+1}(x) - T(y)\|^2 + (1-\alpha)\|T^n(x) - T(y)\|^2\\ &\leq \beta\|T^{n+1}(x) - y\|^2 + (1-\beta)\|T^n(x) - y\|^2.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan limit Banach μ pada ℓ^∞ diperoleh

$$\begin{aligned}&\mu(\{\alpha\|T(x_n) - T(u)\|^2 + (1-\alpha)\|x_n - T(u)\|^2\})\\ &\qquad \leq \mu(\{\beta\|T(x_n) - u\|^2 + (1-\beta)\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \alpha\mu(\{\|T(x_n) - x_n + x_n - T(u)\|^2\}) + (1-\alpha)\mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\})\\ &\qquad \leq \beta\mu(\{\|T(x_n) - u\|^2\}) + (1-\beta)\mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \alpha\mu(\{\|T(x_n) - x_n\|^2\}) + \alpha\mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\})\\ &\quad + 2\alpha\mu(\{\langle T(x_n) - x_n, x_n - T(u)\rangle\}) + (1-\alpha)\mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\})\\ &\qquad \leq \beta\mu(\{\|T(x_n) - x_n\|^2\}) + \beta\mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\quad + 2\beta\mu(\{\langle T(x_n) - x_n, x_n - u\rangle\}) + (1-\beta)\mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \alpha \lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - x_n\|^2 + \alpha\mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\})\\ &\quad + 2\alpha \lim_{n\to\infty} \langle T(x_n) - x_n, x_n - T(u)\rangle + (1-\alpha)\mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\})\\ &\qquad \leq \beta \lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - x_n\|^2 + \beta\mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\quad + 2\beta \lim_{n\to\infty} \langle T(x_n) - x_n, x_n - u\rangle + (1-\beta)\mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \alpha(0) + \alpha\mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\}) + 2\alpha(0) + (1-\alpha)\mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\})\\ &\qquad \leq \beta(0) + \beta\mu(\{\|x_n - u\|^2\}) + 2\beta(0) + (1-\beta)\mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\}) \leq \mu(\{\|x_n - u\|^2\}).\end{aligned}$$

Jadi, $\mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\}) \leq \mu(\{\|x_n - u\|^2\})$.
Lebih lanjut,

$$\begin{aligned}&\mu(\{\|x_n - T(u)\|^2\}) \leq \mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \mu(\{\|x_n - u + u - T(u)\|^2\}) \leq \mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \mu(\{\|x_n - u\|^2\}) + \mu(\{\|u - T(u)\|^2\})\\ &\quad + 2\mu(\{\langle x_n - u,\, u - T(u)\rangle\}) \leq \mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \mu(\{\|x_n - u\|^2\}) + \mu(\{\|u - T(u)\|^2\})\\ &\quad + 2\lim_{n\to\infty} \langle x_n - u,\, u - T(u)\rangle \leq \mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \mu(\{\|x_n - u\|^2\}) + \mu(\{\|u - T(u)\|^2\}) + 2(0) \leq \mu(\{\|x_n - u\|^2\})\\ &\Leftrightarrow \mu(\{\|x_n - u\|^2\}) + \mu(\{\|u - T(u)\|^2\}) \leq \mu(\{\|x_n - u\|^2\}).\end{aligned}$$

□

Jadi,$\mu(\{\|u - T(u)\|^2\}) \leq 0$. Karena $\mu(\{\|u - T(u)\|^2\}) \leq 0$ maka $\|u - T(u)\|^2 \leq 0$. Karena $\|u - T(u)\|^2 \leq 0$ maka $\|u - T(u)\|^2 = 0$. Akibatnya, $u = T(u)$.

3.4. Beberapa Pemetaan Bentuk Khusus Pemetaan *Hybrid* Diperumum dan Sifat-sifatnya

Pada bagian ini akan dipaparkan mengenai pemetaan nonekspansif, *nonspreading*, dan *hybrid* [1], [11], [15], [16]. Pemetaan nonekspansif merupakan pemetaan *hybrid* diperumum dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = 0$, pemetaan *nonspreading* merupakan pemetaan *hybrid* diperumum dengan $\alpha = 2$ dan $\beta = 1$, dan pemetaan *hybrid* merupakan pemetaan *hybrid* diperumum dengan $\alpha = \frac{3}{2}$ dan $\beta = \frac{1}{2}$. Dengan demikian teorema-teorema eksistensi titik tetap pada pemetaan *hybrid* diperumum dengan menggunakan limit Banach berlaku juga pada pemetaan nonekspansif, *nonspreading*, dan *hybrid*.

Akibat 1

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong dan pemetaan $T : C \to C$ nonekspansif. Jika terdapat $x \in C$ sehingga $\{T^n(x)\}$ terbatas maka T memiliki titik tetap.

Akibat 2

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong dan pemetaan $T : C \to C$ nonspreading. Jika terdapat $x \in C$ sehingga $\{T^n(x)\}$ terbatas maka T memiliki titik tetap.

Akibat 3

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong dan pemetaan $T : C \to C$ hybrid. Jika terdapat $x \in C$ sehingga $\{T^n(x)\}$ terbatas maka T memiliki titik tetap.

Akibat 4

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong dan pemetaan $T : C \to C$ nonekspansif. Jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subseteq C$, $x_n - T(x_n) \to 0$ dan terdapat $u \in C$ sehingga $x_n \rightharpoonup u$ maka $u = T(u)$.

Akibat 5

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong dan pemetaan $T : C \to C$ nonspreading. Jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subseteq C$, $x_n - T(x_n) \to 0$ dan terdapat $u \in C$ sehingga $x_n \rightharpoonup u$ maka $u = T(u)$.

Akibat 6

Diketahui H ruang Hilbert atas $\mathbb{R}$, $C \subseteq H$ himpunan konveks tertutup tak kosong dan pemetaan $T : C \to C$ hybrid. Jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subseteq C$, $x_n - T(x_n) \to 0$ dan terdapat $u \in C$ sehingga $x_n \rightharpoonup u$ maka $u = T(u)$.

4. Kesimpulan

Kesimpulan dari eksistensi titik tetap untuk pemetaan *Hybrid* diperumum di ruang Hilbert adalah sebagai berikut:

1. Ruang Hilbert atas real yang terdapat himpunan C yang bersifat konveks, tertutup, dan tidak kosong. Selanjutnya, diberikan suatu T pemetaan *hybrid* diperumum yang memetakan setiap elemen di dalam C ke elemen lain yang juga berada di dalam C. Apabila terdapat $x \in C$ sehingga barisan $\{T^n(x)\}$ terbatas, maka dengan menggunakan Limit Banach dapat disimpulkan bahwa pemetaan tersebut memiliki titik tetap, yaitu suatu elemen yang dipetakan ke dirinya sendiri oleh pemetaan tersebut.
2. Ruang Hilbert atas real yang terdapat himpunan C yang bersifat konveks, tertutup, dan tidak kosong. Selanjutnya, diberikan suatu T pemetaan *hybrid* diperumum yang memetakan setiap elemen di dalam C ke elemen lain yang juga berada di dalam C. Apabila untuk setiap barisan elemen di dalam C berlaku bahwa selisih antara setiap elemen barisan dengan hasil pemetaannya konvergen ke nol, dan barisan tersebut konvergen lemah ke suatu elemen di dalam C, maka dengan menggunakan Limit Banach dapat disimpulkan bahwa elemen itu merupakan titik tetap dari pemetaan tersebut.
3. Pemetaan nonekspansif merupakan pemetaan *hybrid* diperumum dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = 0$, pemetaan *nonspreading* merupakan pemetaan *hybrid* diperumum dengan $\alpha = 2$ dan $\beta = 1$, dan pemetaan *hybrid* merupakan pemetaan *hybrid* diperumum dengan $\alpha = \frac{3}{2}$ dan $\beta = \frac{1}{2}$, sehingga teorema-teorema eksistensi titik tetap pada pemetaan *hybrid* diperumum dengan menggunakan limit Banach juga berlaku pada pemetaan nonekspansif, *nonspreading*, dan *hybrid*.

Untuk penelitian selanjutnya dapat diselidiki teorema Ergodic untuk pemetaan *hybrid* diperumum di ruang Hilbert atas real.

Pernyataan Kontribusi Penulis (CRediT)

Firman Riansyah: Konseptualisasi, Metodologi, Penulisan–Draf Awal, Analisis Formal, Penulis berkontribusi secara substansial terhadap penelitian ini dan telah menyetujui versi akhir naskah untuk diterbitkan

Deklarasi Penggunaan AI atau Teknologi Berbasis AI

Model ChatGPT versi 4 digunakan secara terbatas untuk membantu penyesuaian tata bahasa akademik, dan konsistensi gaya penulisan sesuai standar jurnal. Semua analisis matematis, formulasi, dan interpretasi hasil dilakukan sepenuhnya oleh penulis.

Deklarasi Konflik Kepentingan

Penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang dapat memengaruhi hasil atau interpretasi dari penelitian ini.

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal.

Ketersediaan Data

Seluruh data yang digunakan dalam penelitian ini bersifat simbolik dan teoretis, disusun oleh penulis berdasarkan contoh-contoh dalam literatur standar analisis fungsional. Tidak ada dataset eksternal yang digunakan. Kode komputasi atau ilustrasi simbolik dapat diberikan atas permintaan kepada penulis korespondensi melalui alamat surel yang tertera pada naskah.

Daftar Pustaka

[1] F. E. Browder, "Nonexpansive nonlinear operators in a banach space," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, vol. 54, pp. 1041–1044, 1965.

[2] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[3] R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[4] F. Kohsaka and W. Takahashi, "Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in banach spaces," *Archiv der Mathematik*, vol. 91, no. 2, pp. 166–177, 2008. DOI: 10.1007/s00013-008-2545-8.

[5] W. Takahashi, "Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a hilbert space," *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, vol. 11, no. 1, pp. 79–88, 2010. DOI: 10.1186/1687-1812-2013-116.

[6] P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, "Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in hilbert spaces," *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 14, no. 6, pp. 2497–2511, 2010. DOI: 10.11650/twjm/1500406086.

[7] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1990.

[8] G. Bachman and L. Narici, *Functional Analysis*. New York: Academic Press, 1966.

[9] S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert Space*. New York: Oxford University Press, 1961.

[10] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Canada: John Wiley and Sons, 1978.

[11] S. Ammari, M. Nur, and N. Aris, "Fixed point theorem on contractive mapping in standard 2-normed spaces," *Journal of Mathematics and Sciences*, vol. 18, no. 1, pp. 93–101, 2021. DOI: 10.20956/j.v18i1.14394.

[12] Y. B. M. Djala et al., "Sifat kekonvergenan lemah pada ruang bernorma beserta operator pada ruang barisan konvergen lemah," *JOMTA: Journal of Mathematics and Its Applications*, vol. 6, no. 2, 2022. DOI: 10.31605/jomta.v6i2.4044.

[13] A. Sarkar and B. C. Tripathy, "Weak convergence of sequences defined by orlicz function in n-normed space," *Bulletin of the Society of Paranaense Mathematics*, 2024. DOI: 10.5269/bspm.78161.

[14] V. Barbu and T. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*. New York: Springer, 2012.

[15] H. Firdaus, "Existence and uniqueness of fixed points on non-expansive mapping in quasi-normed spaces," *Journal of Mathematics Education and Science*, vol. 8, no. 2, 2025. DOI: 10.32665/james.v8i2.5236.

[16] F. Riansyah, "Fixed point theorems for nonexpansive, nonspreading, and hybrid mappings in hilbert space," *International Journal of Transdisciplinary Knowledge*, vol. 2, no. 2, 2021. DOI: 10.31332/ijtk.v2i2.18.