APLIKASI ALJABAR LINIER PADA PEMROGRAMAN LINIER

Mirtawati
Program Studi Matematika FST Universiatas Islam As-Syafi'iyah Jakarta

e-issn: 2987-2979
DOI: https://doi.org/10.34005/ms.v2i1.4291

ABSTRAK

Pemrograman linier merupakan model matematika untuk menentukan harga ekstrim dari fungsi fungsi linier, bila variabelnya harus memenuhi satu atau lebih kendala dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan. Penyelesaian masalah pemrograman linier dengan metode simpleks adalah metode yang paling popular diantara metode penyelesaian yang lain. Makalah ini juga menuliskan metode simpleks untuk menyelesaikan pemrograman linier namun dengan penekanan pada aplikasi aljabar linier pada metoda simpleks.

Keyword : Pemrograman Linier, Sistem Persamaan Linier, OBE

I. PENDAHULUAN

Pemrograman linier merupakan salah satu metoda pemecahan masalah di dalam operasi riset. Pemrograman linier berkaitan dengan perencanaan alokasi sumber sumber terbatas seperti bahan baku, dana atau hasil produksi untuk didistribusikan ke dalam kegiatan yang kompetitif dan layak dengan tujuan mencapai hasil yang optimal (Ayuningsih et al., 2020).

Pemrrograman linier terstuktur menurut tiga (3) rangkaian unsur dasar yaitu :

1. *Decision variables* dan parameter

   Decision variables adalah peubah yang tidak diketahui besarnya dan harus dipecahkan dalam model, sedangkan yang dimaksud parameter adalah peubah dalam system dapat bersifat deterministik dan probabilistik
2. Fungsi Kendala

   Dengan memperhitungkan limit fisik suatu system, maka suatu model harus membatasi *Decision variables* pada nilai yang *feasible* (nyata).
3. Fungsi Tujuan

   Fungsi Tujuan adalah tolak ukur efektifitas suatu system sebagai fungsi matematika dari *Decision variables*, dinotasikan dengan z

Pemecahan masalah pemrograman linier dapat dilakukan dengan berbagai cara diantaranya cara geometris, namun cara ini tidak cukup praktis, bahkan tidak dapat dilakukan untuk lebih tiga variable. Cara lainnya adalah dengan metode simpleks (simplex method). Pemecahan masalah dengan metode simpleks dapat dilakukan pada sebarang jumlah variable.

Pemecahan masalah dengan metode simpleks banyak menggunakan konsep aljabar linier seperti matriks dan sistem persamaan linier. Artikel ini menjelaskan penggunaan aljabar linier pada penyelesaian masalah pemrograman linier dengan metode simpleks. Aplikasi akan diberikan pada masalah pemrograman linier dengan 3 variabel.

II. PUSTAKA

1. Pemrograman Linier

Pemrograman linier adalah menentukan harga ekstrim dari fungsi fungsi linier, bila variabelnya harus memenuhi satu atau lebih kendala dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan.
Model pemrograman linier memiliki bentuk standar sebagai berikut :

Fungsi tujuan : mengoptimalkan fungsi berikut :

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_3x_3$$

Yang memenuhi syarat kendala :

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{gathered}$$

dan

$$x_i \geq o \text{ untuk } i = 1, 2, \dots n$$

Dengan :
Z = nilai fungsi tujuan
c_j = sumbangan per unit kegiatan, untuk masalah maksimasi c_j akan menunjukkan keuntungan atau penerimaan per unit, sedangkan untuk minimasi akan menunjukkan biaya per – unit.
x_j = banyaknya kegiatan, $j = 1,2,..n$
a_{ij} = banyaknya sumber daya i yang dikonsumsi sumber daya j
b_i = Jumlah sumber daya, $i = 1,2,..n$

2. Konsep Aljabar Linier dalam Pemrograman Linier

a. Bentuk standar pemrograman linier, dapat dituliskan dalam notasi matriks berikut : Optimalkan fungsi tujuan :

$$Z = C^tX$$

Syarat kendala :$AX = B$

dan $$X \geq 0$$

b. Definisi:

Suatu vektor

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dinamakan pemecahan dasar dari system linear $AX = B$ jika n = m

c. Definisi :
   Operasi baris elementer (OBE) dapat diterapkan dalam suatu matriks, dengan menggunakan salah satu dari operasi berikut :
   1. Kalikan baris i dengan scalar $k \neq 0$
   2. Jumlahkan perkalian pada1, dengan baris lainnya
   3. Pertukarkan dua baris
d. Definisi :
   Dalam sebuah pemrograman linier standar, sebuah pemecahan yang mugkin yang juga merupakan pemecahan dari system $AX = B$ dinamakan *basic feasible solution*

III. METODOLOGI :

Pemrograman linier memiliki tujuan khusus yaitu mengoptimumkan fungsi tujuan. Untuk memdapatkan nilai optimum dari fungsi tujuan tersebut, maka tahap – tahap berikut dapat dilakukan, yaitu :

1. Transformasikan persamaan pemrograman linier kedalam persamaan bentuk standar, caranya adalah sebagai berikut :
   a. Konversikan masalah minimasi menjadi masalah maksimasi dengan mendefinisikan ulang fungsi tujuan, yaitu : $z' = -z$
   b. Ubahlah pertidaksamaan $\geq$ menjadi $\leq$ pada persamaan kendala dengan mengalikan persamaan dengan -1.
   c. Ubahlah pertidaksamaan $\leq$ menjadi sama dengan $(=)$ pada persamaan kendala dengan menambahkan *variable slact* pada kedua ruas. Untuk setiap variable slack yang digunakan, ditetapkan koefisien $c_i = 0$ pada fungsi tujuan, ini dimaksudkan agar nantinya nilai variable slack pada fungsi tujuan tidak akan mempengaruhi hasil fungsi tujuan.
2. Transformasikan persamaan bentuk standar kedalam bentuk system persamaan linier, dengan aturan persamaan fungsi tujuan diletakkan dibawah persamaan syarat kendala atau sebaliknya, fungsi tujuan diletakkan di baris paling atas.
3. Transformasikan system persamaan linier kedalam bentuk matriks
4. Tentukan penyelesaian matriks untuk mendapatkan nilai optimum, perolehan nilai optimum ditandai dengan baris terakhir atau naris paling atas (fungsi tujuan) sudah tidak lagi mengandung nilai negative.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model dengan Pemrograman linier akan memiliki persamaan yang mungkin saja dapat dengan mudah dicari solusinya, tetapi juga tidak jarang sulit diselesaikan hingga tidak diperoleh solusinya. Sebagai ilustrasi dibawah ini akan diberikan dua macam model pemrograman linier :

1. Misal diberikan permasalahan pemrograman linier untuk memaksimumkan fungsi tujuan z dari persamaan berikut :

$$z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

Dengan syarat kendala :

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

Dan : $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Karena pada permasalahan pemrograman linier diatas persamaan kendalanya sudah dalam bentuk $\leq$, maka untuk memperoleh bentuk standar hanya tinggal melakukan langkah c, sehingga diperoleh persamaan bentuk standar sebagai berikut :

$$z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

Dengan syarat :

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 15$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 7$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 6$$

Dan : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Tahap selanjutnya adalah mentranformasi persamaan bentuk standar menjadi bentuk system persamaan linier, yaitu :

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 15 \\
3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 7 \\
2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 6 \\
-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + z &= 0
\end{aligned}$$

Bentuk matriks dari system persamaan linier diatas adalah :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Atau dalam bentuk matriks yang diperbesar :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z & b_i \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ Z \end{array} \end{array}$$

Perhatikan baris z (baris terakhir), perhatikan pula kolom dari bilangan negatif terbesar dari baris tersebut (x_5), bagilah setiap elemen kolom b_i dengan setiap elemen kolom x_2 (dengan meniadakan pembagian pada baris terakhir), pilihlah nilai paling kecil, diperoleh nilai paling kecil terletak di baris x_5 kolom x_2, selanjutnya :

a. Karena hasil operasi bagi elemen terkecilnya berada di baris x_5, maka lakukan operasi bagi setiap elemen pada baris x_5 dengan elemen pada baris x_5 kolom x_2
b. Membuat sisa elemen pada kolom x_2 sama dengan 0. Dengan OBE sehingga diperoleh :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z & b_i \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ Z \end{array} \end{array}$$

Perhatikan kembali baris z, perhatikan pula kolom dari bilangan yang masih negatif dari baris tersebut, kemudian ke iterasi selanjutnya dengan cara yang sama, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z & b_i & \\
0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{14}{3} & x_4 \\
0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{3} & x_2 \\
1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} & x_1 \\
0 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{47}{3} & Z
\end{array}
$$

Perhatikan kembali baris z, terlihat bahwa setiap elemen di dalam baris z sudah tidak mengandung nilai negative (dengan meniadakan elemen paling kanan) maka dapat dikatakan bahwa nilai optimum pada permasalahan pemrograman linier telah diperoleh yaitu:

$$x_1 = \frac{5}{3},\ x_2 = \frac{8}{3}, x_3 = 0,\quad x_4 = \frac{14}{3}, z = \frac{47}{3}$$

Atau dengan meniadakan *variable slack*, nilai optimumnya adalah :

$$x_1 = \frac{5}{3},\ x_2 = \frac{8}{3}, x_3 = 0, z = \frac{47}{3}$$

2. Misal diberikan permasalahan pemrograman linier untuk memaksimumkan fungsi tujuan z dari persamaan berikut :

$$z = 3x_1 - x_2 + 4x_3$$

Dengan syarat kendala:

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$
$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1$$
$$3x_1 \quad + 6x_3 \leq 4$$

$$3x_1 \quad + 6x_3 \leq 4$$

Dan : $$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Karena pada permasalahan pemrograman linier diatas persamaan kendalanya sudah dalam bentuk $\leq$, maka untuk memperoleh bentuk standar hanya tinggal melakukan langkah c, sehingga diperoleh persamaan bentuk standar sebagai berikut :

$$z = 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

Dengan Syarat:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \quad\quad\quad\quad &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \quad\quad + x_5 \quad &= 1 \\ 3x_1 \quad + 6x_3 \quad\quad\quad\quad + x_6 &= 4 \end{aligned}$$

Dan : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Tahap selanjutnya adalah mentranformasi persamaan bentuk standar menjadi bentuk system persamaan linier, yaitu:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \quad\quad\quad\quad &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \quad\quad + x_5 \quad &= 1 \\ 3x_1 \quad + 6x_3 \quad\quad\quad\quad + x_6 &= 4 \end{aligned}$$

$$-3x_1 + x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + z$$

Bentuk matriks dari system persamaan linier diatas adalah :

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Atau dalam bentuk matriks yang diperbesar :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z & b_i \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} -3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} z \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \end{array}$$

Perhatikan baris z (baris teratas), perhatikan pula kolom dari bilangan negatif terbesar dari baris tersebut (x_3), bagilah setiap elemen kolom b_i dengan setiap elemen kolom x_3 (dengan meniadakan pembagian pada baris teratas), pilihlah nilai paling kecil, diperoleh nilai paling kecil terletak di baris x_6 kolom x_3, selanjutnya :

a. Karena hasil operasi bagi elemen terkecilnya berada di baris x_6, maka lakukan operasi bagi setiap elemen pada baris x_6 dengan elemen pada baris x_6 kolom x_3
b. Membuat sisa elemenv pada kolom x_3 sama dengan 0, dengan OBE sehingga diperoleh :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z & b_i \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccccccc}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\
\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\
2 & 4 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3}
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ z \\ x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{array}$$

Perhatikan kembali baris z, perhatikan pula kolom dari bilangan yang masih negatif dari baris tersebut, kemudian lakukan operasi yang sama di iterasi selanjutnya, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & z & b_i \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccccccc}
0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{12} & 1 & \frac{23}{6} \\
0 & -2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{29}{12} \\
1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{6} \\
0 & -1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{12}
\end{array}\right|
\end{array}
\begin{array}{c} \\ z \\ x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{array}$$

Perhatikan kembali baris z, terlihat bahwa setiap elemen di dalam baris z sudah tidak mengandung nilai negative (dengan meniadakan elemen paling kanan) maka dapat dikatakan bahwa nilai optimum pada permasalahan pemrograman linier telah diperoleh yaitu :

$$x_1 = \frac{7}{6}\,, x_2 = 0\,, x_3 = \frac{1}{12}\,, x_4 = \frac{29}{12}, z = \frac{23}{6}$$

Atau dengan meniadakan *variable slack*, nilai optimumnya adalah :

$$x_1 = \frac{7}{6}\,, x_2 = 0\,, x_3 = \frac{1}{12}\,, z = \frac{23}{6}$$

SIMPULAN

Model pemrograman linier merupakan model matematika untuk menentukan harga ekstrim dari fungsi fungsi linier, bila variabelnya harus memenuhi satu atau lebih kendala dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan.

Penyelesaian model pemrograman linier dengan menggunakan metode simpleks, sama artinya dengan menggunakan aljabar linier dengan perlakuan tertentu untuk menyelesaikan permasalahan. Konsep aljabar linier yang digunakan antara lain matriks, system persamaan linier juga Operasi baris elementer.

Dari dua ilustrasi yang diberikan pada hasil dan pembahasan menunjukkan bahwa tidak ada perbedaan jumlah iterasi bila fungsi tujuan (z) diletakkan pada baris paling bawah atau baris paling atas pada system persamaan linier

DAFTAR PUSTAKA

Ayuningsih, R., Setyowati, R. D., & Utami, R. E. (2020). ***Analisis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Program Linear Berdasarkan Teori Kesalahan Kastolan***. In Imajiner Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika (Vol. 2, Issue 6, p. 510). Universitas PGRI Semarang. https://doi.org/10.26877/imajiner.v2i6.6790

Anton Howard, Rorres C, ***Elementary Linier Algebra With Aplication***, terjemahan Pantur Silaban, Erlangga, 1987

Bill Jacob**,** ***LinearAlgebra***, WH Freeman And Company New York 1990

Kakisna, Handoyo B, ***Programasi Linier***, Satya Wacana, 1986

NN, *Pemrogranan Linier* , E – Book, Universitas Gunadarma