Jurnal Riset Rumpun Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (JURRIMIPA)
Vol.2, No.2 Oktober 2023
p-ISSN: 2828-9382; e-ISSN: 2828-9390, Hal 147-161
DOI: https://doi.org/ 10.55606/jurrimipa.v2i2.1533

Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Graf Tangga

Riandy Fauzi Manik
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Medan
E-mail: riandi.manik.123@gmail.com

Marlina Setia Sinaga
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Medan
E-mail: Marlinasetiasinaga222@gmail.com

Jalan Willem Iskandar Pasar V Medan Estate, Kotak Pos No. 1589 Medan 20221 A, Sumatera Utara

Abstract. *The labeling of a graph is a mapping that pairs the elements in the graph into positive integers. In this thesis, it discusses how the magic total point labeling algorithm on the $L_{4,4}$ ladder graph and the $L_{8,8}$ ladder graph and how the magic total point labeling on the $L_{4,4}$ ladder graph and the $L_{8,8}$ adder graph uses the magic square matrix modification using the durer method. Where the elements of the result of this magic square matrix modification will be used as point labels on the $L_{4,4}$ ladder graph and the $L_{8,8}$ ladder graph.*

Keywords: *Ladder graphs $L_{4,4}$ and $L_{8,8}$, magic total dot labeling, modified square matrix, durer method.*

Abstrak. Pelabelan suatu graf merupakan suatu pemetaan yang memasangkan elemen-elemen yang ada pada graf menjadi bilangan bulat positif. Didalam skripsi ini membahas bagaimana algoritma pelabelan total tiik ajaib pada graf tangga $L_{4,4}$ dan graf tangga $L_{8,8}$ serta bagaimana pelabelan total titik ajaib pada graf tangga $L_{4,4}$ dan graf tangga $L_{8,8}$ menggunakan modifikasi matriks bujur sangkar ajaib dengan menggunakan metode durer. Dimana elemen-elemen hasil dari modifikasi matriks bujursangkar ajaib ini akan digunakan sebagai label titik pada graf tangga $L_{4,4}$ dan graf tangga $L_{8,8}$.

Kata kunci: Graf tangga $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$, pelabelan total titik ajaib, modifikasi matriks bujur sangkar, metode durer.

Received Mei 30, 2023; Revised Juni 30, 2023; Accepted Juli 15, 2023
* Riandy Fauzi Manik, riandi.manik.123@gmail.com

LATAR BELAKANG

Didalam studi matematika terdapat topik tentang pelabelan graf, dimana objek yang dibahas berupa teori graf yang digambarkan dalam bentuk titik dan sisi dan terdiri dari bilangan asli yang disebut label yang pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk pada tahun 1964, Stewart pada tahun 1966, serta Kotzig dan Rosa pada tahun 1970[1]. Ada banyak jenis-jenis pelabelan, diantaranya adalah pelabelan sisi, pelabelan titik, dan pelabelan ajaib. Dimana saat graf diberi label berfokus dipenemuan graf-graf tertentu yang dapat digunakan untuk melabelkan graf. [2]

Pelabelan total titik ajaib dapat diaplikasikan ke macam-macam graf, diantaranya adalah pelabelan total titik ajaib pada graf tangga yang berjudul *Total Vertex Irregularity Strength Of Ladder Related Graphs (*Slamin dkk, 2014*), Vetex Polinomial Of Ladder Graphs*, (Ahmad dkk, 2019), dan pelabelan jumlah eksklusif pada graf tangga *Ln* (Debby dan Peter, 2011) serta *Vertex-magic Total Labeling of Generalized Petersen Graphs and Convex Polytopes* (Miller dkk, 2017). Graf tangga *Ln* didefinisikan sebagai produk kartesian dari *P2* dan *Pn*. Ketika dibentuk kelihatan seperti tangga dengan n anak tangga. Dengan cara yang sama kita dapat mengatakan bahwa terdapat dua himpunan dari simpul *Pn* pada setiap sisi tangga dan kedua sisi dari tangga dihubungkan dengan anak tangga.[3]

Dalam pembentukan graf tangga dengan kali kartesius antara dua graf lintasan, terdapat beberapa bentuk yang dihasilkan dari graf tangga. Menurut M. Regees dkk, dalam penelitiannya yang berjudul *Edge magic and bimagic harmonious labeling of ladder graphs* tahun 2020 terdapat bentuk graf tangga yaitu graf tangga melingkar CL_{11} dengan nilai k =55, menurut V. Jeba Rani dkk, didalam penelitiannya yang berjudul *Vertex Polynomial Of Ladder Graphs* terdapat juga bentuk graf tangga yang lain dimana penggunaan fungsi polynomial terhadap graf tangga, dan menurut A. Durai Baskar pada penelitiannya yang berjudul *Logarithmic Mean Labeling of Some Ladder Related Graphs* pada tahun 2020 melabeli graf tangga dengan algoritma rata-rata sehingga membentuk sebuah graf tangga bentuk yang baru.

---

[1] Aldous, J, M dan Wilson, R, J. (2004): *Graphand Aplications An introductory Approach*, 4th ed, Open University 2000, Great Britain, Di akses dari https://www.amazon.com/Magic-Graphs-Alison-M-Marr/dp/0817683909.

[2] Kotzig, A, dan Rosa, A. (1970). *Magic valuations of finite graphs.* Canada. Math. Bull. 13, 451-461.

[3] Debby, S. Peter, J. M,H, (2011): *Pelabelan jumlah eksklusif pada graf tangga Ln*, Prosiding SeminarNasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA.

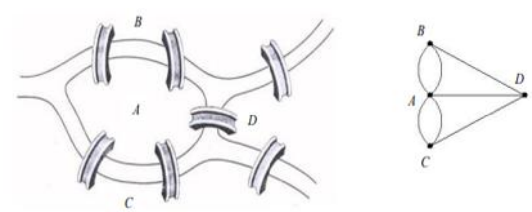
Adapun matriks bujur sangkar ialah matriks persegi dimana entri-entrinya adalah bilangan bulat non negatif, sehingga mempunyai nomor baris yang sama dengan nomor kolom, contohnya 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4 dan seterusnya. Artinya pada matriks ini tidak bisa berordo berbeda. Jika 2×2 maka dia mempunyai 2 baris dan 2 kolom dan jika 3×3 maka mempunyai 3 baris dan 3 kolom. Matriks bujur sangkar juga disebut dengan matriks persegi karena terdapat jumlah dan kolom yang sama dan membentuk sebuah persegi. Pada matris bujur sangkar ini biasanya dikenal dengan istilah elemen diagonal yang terdapat pada baris dan kolom. Matriks bujur sangkar ajaib berukuran n x n dengan n bilangan ganjil dan $n \geq 3$ adalah menggunakan elemen-elemen matriks tersebut dari 1 sampe n^2 sedemikian sehingga setiap baris, kolom dan diagonal utama mempunyai jumlah yang sama.[4]

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah disajikan, maka penulis mengusulkan untuk melakukan penelitian yang berjudul "**PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA GRAF TANGGA**".

KAJIAN TEORITIS

Pengertian Graf

Pada tahun 1736 konsep tentang teori graf diperkenalkan oleh seorang matematikawan bernama Leonard Euler. Pada teorinya euler memecahkan misteri permasalahan Jembatan Konigsberg. Pada jembatan tersebut terdapat sebuah sungai yang mengalir yang bernama Pregel dan mengelilingi sebuah pulau. Sungai pregel ini terbagi dua dan membentuk dua aliran sungai dimana ada sebanyak tujuh jembatan penghubungnya. Teori ini dibuktikan bahwa seseorang tidak mungkin dapat menyebrangi ketujuh jembatan sekali saja dan kemudian kembali lagi ke asalnya.



Gambar 1. hasil penggambaran teori euler

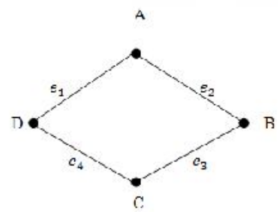
[4] Lee, Michael, 2006. *Liniear Algebra of Magic Square*, Central Micigan University.

Terminologi Dasar Graf

Di bawah ini terdapat beberapa terminologi atau definisi yang berkaitan pada graf yang biasa digunakan.[5]

- **Bertetangga *(Adjacent)***

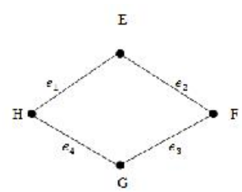
  Titik u dikatakan bertetangga dengan titik v, jika (u, v) merupakan sisi pada graf G.



Gambar 2. contoh graf sederhana a

- **Bersisian *(Incident)***

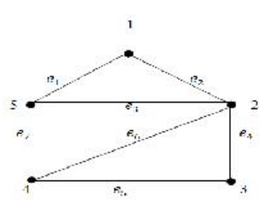
  Bersisian (*incident*) adalah sisi e dengan $titik\, u$ dan $titik\, v$ bersisisan, untuk sembarang sisi $e = (u, v)$.



Gambar 3. contoh graf sederhana b

- **Lintasa**n (*Path*)

  Pada gambar dibawah ini contoh graf mengandung sebuah lintasan (*path*). Dari gambar 4 terdapat lintasan $1, 2, 3, 4$ dengan barisan sisi e_2, e_4,e_5.



Gambar 4. contoh graf sederhana c

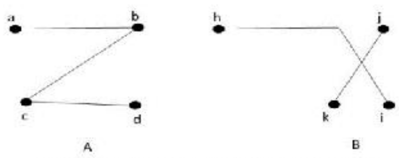
[5] Munir, R, (2012): *Matematika Diskrit*, Informatika, Bandung.

- **Siklus***(Cycle*) **atau Sirkuit** (*Circuit*)

  Pada gambar 4 merupakan contoh siklus (*Cycle*) atau sirkuit (*Circuit)*. Terlihat digambar 4 diatas, diawali dengan titik $1, 2, 5, 1$ adalah sirkuit. Jumlah sisi di dalam sirkuit merupakan panjang sirkuit dan pada gambar 4 panjang sirkuitnya adalah 3.

- **Terhubung** (*Connected)*

  Keterhubungan dua buah titik adalah penting di dalam graf, dimana titik *u* dan *v* terhubung jika titik *u* terdapat lintasan ke titik *v*.

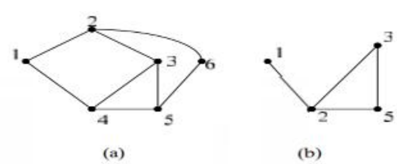


Gambar 5. Graf terhubung dan tak terhubung

Pada gambar 5 diatas graf A adalah gambar untuk graf terhubung dan mempunyai lintasan dari titik a ke titik d dan diantara titik yang dihubungkan sebuah sisi, dan graf B adalah gambar graf yang tidak terhubung karena terdapat titik dan sisi pada graf yang tidak dihungkan oleh sebuah sisi.

- **Upgraf** (*Sup Graph*)

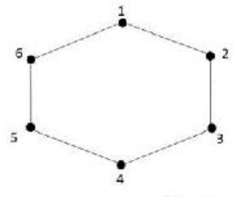
Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf $G_1 = (V_1, E_1)$ merupakan upgraf (*sub graph*) dari G, jika $V_1 \subseteq V$ dan$E_1 \subseteq E$. Dibawah ini merupakan contoh upgraf (*sub graph*) dari sebuah jenis graf.



Gambar 6. (a) Contoh Graf dan (b) Contoh Subgraf dari a

- **Lingkaran**

  Contoh dari graf lingkaran dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 7. Graf Lingkaran

Jenis Jenis Graf

- **Graf Sederhana**

  Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki *loop* ataupun sisi ganda pada grafnya. Sisi-sisi pada graf sederhana ialah pasangan takterurut (*unourde redpairs*).

- **Graf tak sederhana*(Unsimple Graph)***

  Graf tak sederhana memiliki dua jenis graf yaitu graf ganda dan graf semu. Jika sebuah graf terdiri dari sisi ganda atau *loop* dinamakan Graf Tak Sederhana (*Unsimple Graph*).

Produk Graf

Untuk mendefinisikan produk hasil perkalian graf lintasan $G_1\ dan\ G_2$ dari dua graf dipertimbangkan ada dua titik $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$.

Graf tangga

Graf tangga dapat dibentuk dengan mencari dari hasil kali kartesius sebuah graf lintasan terhadap dua titik kemudian graf lintasan yang memiliki n titik. Penulisan notasi untuk graf tangga ini dilambangkan dengan L_n, maka didapatkan $L_n = P_2 x P_n$ (Joseph, 2018).

Pelabelan Graf

Pemetaan dengan memasang unsur-unsur dari graf dengan menggunakan bilangan bulat positif disebut pelabelan graf. Bilangan tersebutlah yang dikatakan label. Apabila domain pemetaan titik, Maka pelabelan dinamakan pelabelan titik. Apabiladomainnyasisi, Maka dinamakan pelabelan isi, dan dikatakan pelabelan total apabila domainnya titik dan sisi.[6]

[6] Miller, M. Ryan, J. Ryjacek, Z. (2017): Characterisation of graphs with exclusive sum labelling, *Australasian Journal Of Combinatorics*, 69(3), 334–348, Di akses dari https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/69/ajc_v69_p334.pdf.

Pelabelan berkaitan dengan graf yang sering digunakan, yakni pelabelan titik.

Pelabelan Titik

Pelabelan titik merupakan suatu pemetaan apabila domainnya berupa himpunan titik. Sehingga diberikan suatu graf *G* yang memiliki himpunan titik $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}\ dengan\ v \rightarrow i, i \in Z^{+}$.

Definisi Modifikasi matriks Bujur sangkar Ajaib

Matriks yang bujursangkar ajaib yang bilangan-bilangannya $1, 2, \dots, n^2$ disebut juga sebagai bujur sangkar ajaib klasik. Banyak bagian baris, kolom dan juga dua diagonalnya dapat disimbolkan dengan d diartikan juga dengan banyaknya jumlah ajaib, dan n merupakan indeks matriksnya dapat dirumuskan kedalam rumus matematika :

d = $\frac{\sum n^2}{n}$ **atau** $1 + 2 + 3 + \dots\dots + n^2 = \frac{1}{2} n (n^2 + 1)$

METODE PENELITIAN

Metode penelitian ini adalah studi pustaka dimana data yang diperlukan adalah kumpulan berbagai literatur pelabelan graf dari buku buku dan jurnal jurnal yang ada. Peneliti melakukan penelitiannya bertempat di Digital Library universitas negeri medan dan waktu yang diperlukan dalam penyelesaian penelitian ini dibutuhkan lebih kurang didalam waktu dua bulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Algortima pelabelan total titik ajaib graf tangga $L_{4,4}$ *dan* $L_{8,8}$ *dengan modifikasi matriks bujur sangkar ajaib*

Metode yang digunakan untuk menyusun pelabelan total titik ajaib pada graf tangga L_n adalah metode durer dengan modifikasi matriks bujur sangkar ajaib.

Beberapa langkah yang akan dilakukan untuk melakukan modifikasi matriks bujur sangkar ajaib.[7]

a. Terdapat lima matriks berordo $4\ x\ 4$ misal M_1, M_2, M_3, M_4 dan M_5
b. Matriks M_1 terdiri dari angka $1, 2, 3, \dots, n^2$. Dimulai dari $m_{11}, m_{12}, m_{13}, \dots, m_{14}$

[7] Lee, Michael, 2006. *Liniear Algebra of Magic Square*, Central Micigan University.

c. Matriks M_2 terdiri dari elemen nondiagonal dari M_1 dan elemen diagonalnya diberi nilai nol.

d. Matriks M_3 berisikan $1, 2, 3, \ldots, n^2 \in M_1$,. (yang dimulai dari m_{44}, sampai m_{11})

e. Matriks M_4 dibentuk dari dua diagonal dari M_3 dan elemen nondiagonalnya diberi nilai nol.

f. Matriks M_5 merupakan gabungan matriks M_2 dan M_4 , dan hasil M_5.

g. Ini adalah matriks bujur sangkar ajaib.

h. Dari hasil modifikasi matriks bujursangkar ajaib ini maka akan didapatkan nilai konstanta ajaib untuk pelabelan total titik ajaib pada graf tangga.

i. Kemudian dibentuk graf tangga $L_{n,n}$ untuk dilabeli menggunakan hasil dari modifikasi matriks bujursangkar Ajaib.

Maka hasil modifikasi matriks bujur sangkar ajaib pada pelabelan total titik ajaib pada graf tangga L_n akan memenuhi.

Dapat dirumuskan Algoritma pelabelan total titik ajaib pada graf tangga $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$.

(1) Diambil graf tangga $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$yang akan dilabeli.

(2) Menyajikan matriks bujur sangkar dari graf tangga $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$dengan entri-entrinya $\{1, 2, 3, \ldots, n^2\}$.

(3) Matriks bujur sangkar dari $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ akan dimodifikasi dengan metode durer , untuk mendapatkan matriks bujur sangkar ajaib.

(4) Matriks dari graf $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ dikatakan sebagai matriks bujur sangkar ajaib Sesuai defenisi (Michael Lee, 2006)

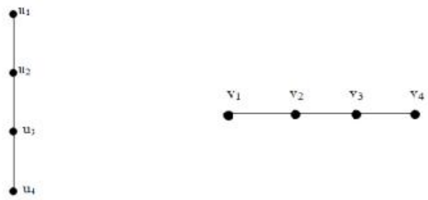
(5) Hasil dari matriks bujur sangkar ajaib akan digunakan untuk melabeli graf $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ (*defenisi* pelabelan graf)

(6) Kemudian graf $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ dilabeli dengan hasil modifikasi matriks bujur sangkar ajaib.

Dari algoritma pelabelan total titik ajaib L_n maka akan didapatkan konstanta ajaib untuk pelabelan graf tangga L_n.

2. Pelabelan total titik ajaib pada graf tangga $L_{4,4}$

Graf tangga $L_{4,4}$ ini adalah hasil kali kartesius graf lintasan P_4 dan P_4.



Gambar 8. graf lintasan P_4

Pelabelan total titik ajaib pada graf $L_{4,4}$ dengan modifikasi matriks bujur sangkar ajaib orde genap menggunakan metode durer. Langkah-langkah metode durer didalam proses menyelesaikan permasalah matriks yang bujursangkar ajaib dengan $n = 4$.

- Matriks M_1 berisikan bilangan $1, 2, 3, \ldots, n^2$ (dimulai $m_{11}, m_{12}, m_{13}, \ldots, m_{14}$.

$$M_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

- Matriks M_2 berisikan elemen non diagonal dari M_1 dan elemen diagonalnya diberi nilai nol.
- Matriks yang berisikan bilangan $1, 2, 3, \ldots, n^2$ (yang dimulai dari $m_{44} \ldots m_{11}$)

$$M_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 14 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriks yang berisikan bilangan $1, 2, 3, \ldots, n^2$ (yang dimulai dari $m_{44} \ldots m_{11}$).

$$M_3 \begin{bmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

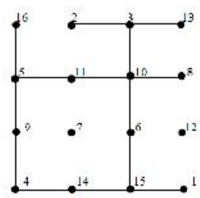
- Matriks berisikan elemen kedua diagonal dari M_3 dan elemen non diagonalnya diberi nilai nol.

$$M_4 \quad \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 11 & 10 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriks yang merupakan kombinasi M_2 dan M_4

$$M_5 \quad \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil modifikasi matrik bujur sangkar ajaib maka dapat dilabeli grafik $L_{4,4}$ sebagai berikut.

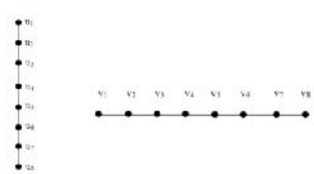


Hasil pelabelan total titik ajaib pada graf $L_{4,4}$ dengan modifikasi matrik bujur sangkar ajaib didapatkan.

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 16 + 2 + 3 + 13 = 34$$
$$V_5 + V_6 + V_7 + V_8 = 5 + 11 + 10 + 8 = 34$$
$$V_9 + V_{10} + V_{11} + V_{12} = 9 + 7 + 6 + 12 = 34$$
$$V_{13} + V_{14} + V_{15} + V_{16} = 4 + 14 + 15 + 16 = 34$$

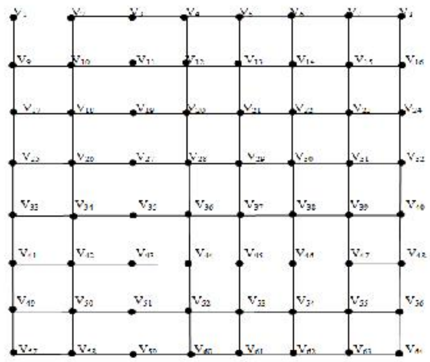
3. Pelabelan total titik ajaib pada graf tangga L $_{8,8}$.

Graf tangga $L_{8,8}$ ini adalah hasil kali kartesius graf lintasan P_8 dan P_8.



Gambar 9. graf lintasan P_8.

Hasil perkalian kartesius graf lintasan P_8 dan P_8 .



Gambar 10. Graf Tangga ***L*** $_{8,8}$

Dengan mengikuti metode durer untuk melabeli graf tangga $L_{8,8}$ maka dapat diselesaikan.

- M_1 merupakan bilangan positif $(1, 2, 3, \ldots 64)$ yang akan dibagi menjadi sub matriks 4 x 4.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 \\ 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 & 64 \end{bmatrix}$$

- M_2 merupakan sub matriks M_1 diagonal utama dan kedua diberi nilai nol.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 12 & 13 & 0 & 0 & 16 \\ 17 & 0 & 0 & 20 & 21 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 26 & 27 & 0 & 0 & 30 & 31 & 0 \\ 0 & 34 & 35 & 0 & 0 & 38 & 39 & 0 \\ 41 & 0 & 0 & 44 & 45 & 0 & 0 & 48 \\ 49 & 0 & 0 & 52 & 53 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & 58 & 59 & 0 & 0 & 62 & 63 & 0 \end{bmatrix}$$

- M_3 terdiri dari bilangan $1, 2, 3, \ldots, 64$ (tetapi tersusun mulai dari $m_{88}, m_{87} \ldots, m_{11}$)

$$M_3 = \begin{bmatrix} 64 & 63 & 62 & 61 & 60 & 59 & 58 & 57 \\ 56 & 55 & 54 & 53 & 52 & 51 & 50 & 49 \\ 48 & 47 & 46 & 45 & 44 & 43 & 42 & 41 \\ 40 & 39 & 38 & 37 & 36 & 35 & 34 & 33 \\ 32 & 31 & 30 & 29 & 28 & 27 & 26 & 25 \\ 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 18 & 17 \\ 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- M_4 terdiridari sub matriks M_3, Diagonal utama dan kedua diberi nilai nol.

$$M_4 = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 & 61 & 60 & 0 & 0 & 57 \\ 0 & 55 & 54 & 0 & 0 & 51 & 50 & 0 \\ 0 & 47 & 46 & 0 & 0 & 43 & 42 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 37 & 36 & 0 & 0 & 33 \\ 32 & 0 & 0 & 29 & 28 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 23 & 22 & 0 & 0 & 19 & 18 & 0 \\ 0 & 15 & 14 & 0 & 0 & 11 & 10 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriks M_5 merupakan gabungan matriks M_2 dan M_4 , dan hasil M_5 ini adalah matriks bujur sangkar ajaib.

$$M_5 = \begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57 \\ 9 & 54 & 53 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56 \\ 8 & 58 & 59 & 3 & 4 & 62 & 63 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasil pelabelan total titik ajaib pada graf $L_{8,8}$ dengan modifikasi matriks bujur sangkar ajaib didapatkan.

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 = 64 + 2 + 3 + 61 + 60 + 6 + 7 + 57 = 260$$
$$V_9 + V_{10} + V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14} + V_{15} + V_{16} = 9 + 55 + 54 + 1\ 2 + 13 + 51 + 50 + 16 = 260$$
$$V_{17} + V_{18} + V_{19} + V_{20} + V_{21} + V_{22} + V_{23} + V_{24} = 17 + 47 + 46 + 20 + 21 + 43 + 42 + 24 = 260$$
$$V_{25} + V_{26} + V_{27} + V_{28} + V2_9 + V_{30} + V_{31} + V_{32} = 40 + 26 + 27 + 37 + 36 + 30 + 31 + 33 = 260$$
$$V_{33} + V_{34} + V_{35} + V_{36} + 37 + V_{38} + V_{39} + V_{40} = 32 + 34 + 35 + 29 + 28 + 38 + 39 + 25 = 260$$
$$V_{41} + V_{42} + V_{43} + V_{44} + V_{45} + V_{46} + V_{47} + V_{48} = 41 + 23 + 22 + 44 + 45 + 19 + 18 + 48 = 260$$
$$V_{49} + V_{50} + V_{51} + V_{52} + V_{53} + V_{54} + V_{55} + V_{56} = 49 + 15 + 14 + 52 + 53 + 11 + 1\ 0 + 56 = 260$$
$$V_{57} + V_{58} + V_{59} + V_{60} + V_{61} + V_{62} + V_{63} + V_{64} = 8 + 58 + 59 + 5 + 4 + 62 + 63 + 1 = 260$$

Pelabelan total titik ajaib pada graf tangga $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$,dengan bilangan genap dan 1, 2, 3, .., n^2 dengan modifikaasi konstruksi bujur sangkar ajaib orde genap. Hasil modifikasi matriks bujur sangkar ajaib ini akan digunakan untuk melabelkan titik ajaib dari graf tangga $L_{4,4}$ dan$L_{8,8}$, , dimana jumlah elemen diagonal utama dan jumlah elemen setiap baris untuk label titik adalah bernilai yaitu graf $L_{4,4}$ memiliki konstanta ajaib 34 dan graf $L_{8,8}$,memiliki konstanta ajaib 260.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka dapat disimpulkan hasil pelabelan total titik ajaib pada graf tangga $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ menggunakan algoritma durer. Adapun algoritma yang digunakan adalah sebagai berikut: 1) Diambil graf tangga $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ yang akan dilabeli, 2) Menyajikan matriks bujur sangkar dari graf tangga $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ dengan entri-entrinya $\{1, 2, 3, \ldots, n^2\}$.., 3)Matriks bujur sangkar dari $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ akan dimodifikasi dengan metode durer , untuk mendapatkan matriks bujur sangkar ajaib, 4) Matriks dari graf $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ dikatakan sebagai matriks bujur sangkar ajaib Sesuai defenisi (Michael Lee, 2006), 5) Hasil dari matriks bujur sangkar ajaib akan digunakan untuk melabeli graf $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ (*defenisi* pelabelan graf), 6) Kemudian graf $L_{4,4}$ dan $L_{8,8}$ dilabeli dengan hasil modifikasi matriks bujur sangkar ajaib.

DAFTAR REFERENSI

Afrianto, I, dan Jamilah, E. (2012): Penyelesaian Masalah Minimum Spanning Tree (MST) Menggunakan Ant Colony System (ACS), *Jurnal Ilmiah Komputer dan Informatika (KOMPUTA)*, 1(2), 35–40.

Ahmad, A. Bokhary, A, S. Hasni, R. Slamin. (2014): Total Vertex Irregularity Strength Of Ladder Related Graphs, *International Journal Science*, *26*(1), 1-5, Diakses dari http://www.sci-int.com/pdf/8025771011--1--5--Ashfaq--co--Imran-0025-Math--Final%20Revised.pdf.

Ahmad, A. Raj Sunder, S. Isaac Shyla, T. (2019): Vetex Polinomial Of Ladder Graphs, *Info Kara Research*, *8*(11), 1-3, Di akses darihttps://www.malayajournal.org/articles/MJM08010035.pdf.

Aldous, J, M dan Wilson, R, J. (2004): *Graphand Aplications An introductory Approach*, 4th ed, Open University 2000, Great Britain, Di akses dari https://www.amazon.com/Magic-Graphs-Alison-M-Marr/dp/0817683909.

Anton, H. (2000).*Dasar-Dasar Aljabar Linier*, Edisi Ketujuh, Jilid 1. Batam Center: Interaksar

Atmadja, K. (2021): Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Pita, *Jurnal Sains dan Matematika Unpam*, *4*(1), 1-6, Di akses dari http://openjournal.unpam.ac.id/index.php/jsmu/article/view/10334/7350.

Bartle, G. R & D. R. Sherbert, (1994): *Introduction to Real Analysis*. Singapore: Jhon Wiley & Sons, INC.

Debby, S. Peter, J. M,H, (2011): *Pelabelan jumlah eksklusif pada graf tangga Ln*, Prosiding SeminarNasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA.

Durai, B, A. (2020): Logarithmic Mean Labeling of Some Ladder Related Graphs, *An International Journal*, *15*(1), 296-313, Diakses dari https://www.pvamu.edu/aam/.

Farida, A. Indah, R. P. Sudibyo, A. N. (2020).Conference Series: Magic covering and edge magic labelling and its application.*Journal of Physics*, *1*(01). 1-6, Di akses dari https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1657/1/012051/pdf.

Hasmawati, (2015). *Bahan Ajar Teori Graf*. Makassar: Universitas Hasanuddin

Joseph A. Gallian,A dynamic survey of graph labeling of some graphs, *The Electronic Journal of Combinatorics*, (2018), #DS6

Kotzig, A, dan Rosa, A. (1970). *Magic valuations of finite graphs.* Canada. Math. Bull. 13, 451-461.

Lakshmi, N, P. Sudhakar, N. (2014): Algorithms For Magic Labelling On Graphs, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 66(1), 36-42, Di akses dari http://www.jatit.org/volumes/Vol66No1/6Vol66No1.pdf.

Lee, Michael, 2006. *Liniear Algebra of Magic Square*, Central Micigan University.

Lipschutz, 2004. Seymour. *Aljabar Linier*, Edisi Ketiga: Erlangga

Marr, A.M and Wallis, W.D, (2013): *Magic Graphs*,2nd ed , Springer Science+Business Media, New York.

Maryati, T. K, Salman A.N,M, Baskoro, E.T, (2011). Supermagic coverings of the disjoint union graphs and amalgamations. *Elsevier Journal*. 313 (2012), 397- 405

Miller, M. Ryan, J. Ryjacek, Z. (2017): Characterisation of graphs with exclusive sum labelling, *Australasian Journal Of Combinatorics*, 69(3), 334–348, Di akses dari https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/69/ajc_v69_p334.pdf.

Munir, R, (2012): *Matematika Diskrit*, Informatika, Bandung.

Sanjaya, D, John, P, Haryono, M. (2011, Mei). *Pelabelan Jumlah Eksklusif pada graf tangga (Ln)*. Prosiding Seminar Nasional, UNY, Yogyakarta. M299-M302. Di akses dari http://eprints.uny.ac.id.

Sedláček, J. (1964). *Theory of graphs and its applications.* 163-164. Publ. House Czechoslovak Acad. Sci, Prague, Di akses dari https://searchworks.stanford.edu.