

Bilangan Kromatik Dari Graf Hasil Operasi Korona Pada Graf Bintang Dan Graf Ligkaran

Shindy Sagita Br Ginting

Universitas Negeri Medan

Mulyono Mulyono

Universitas Negeri Medan

Korespondensi penulis: shindysagita@gmail.com

Abstract: Two graphs are operated with various operations, one of which is Operation Corona. The graphs that are operated in this paper are circle graphs and star graphs. Both graphs are operated with Operation Corona. The graph resulting from the operation is then colored using the Greedy Algorithm. The Chromatic Number obtained from the results of the Corona Operation on a graph ($C_n \odot S_m$) is $\chi_{C_n \odot S_m} = 3$ for every $m, n \geq 3$, $\{m, n \in N\}$. Because the graph resulting from the corona operation is non-commutative, the chromatic number obtained from the graph ($C_n \odot S_m$) is different from the graph ($S_m \odot C_n$). The chromatic number from the corona operation on the graph ($S_m \odot C_n$) is divided into 2, namely: $\chi_{S_m \odot C_n} = 3$ for every odd n , and $\chi_{S_m \odot C_n} = 4$ for every even n , $m \geq 3$, $n \geq 4$, $\{m, n \in N\}$.

Keywords: Greedy Algorithm, Graph, Star Graph, Circle Graph, Corona Operation, Graph Coloring.

Abstrak: Dua buah graf dioperasikan dengan berbagai operasi, salah satunya adalah Operasi Korona. Graf yang dioperasikan pada tulisan ini adalah Graf Lingkaran dan Graf Bintang. Kedua graf tersebut dioperasikan dengan Operasi Korona. Graf hasil operasi tersebut kemudian dilakukan pewarnaan graf menggunakan Algoritma Greedy. Bilangan Kromatik yang diperoleh dari hasil Operasi Korona pada graf ($C_n \odot S_m$) adalah $\chi_{C_n \odot S_m} = 3$ untuk setiap $m, n \geq 3$, $\{m, n \in N\}$. Karena graf hasil operasi korona bersifat **tidak komutatif**, maka hasil bilangan kromatik yang diperoleh dari graf ($C_n \odot S_m$) berbeda dengan Graf ($S_m \odot C_n$). Bilangan Kromatik dari hasil operasi korona pada graf ($S_m \odot C_n$) terbagi 2, yaitu : $\chi_{S_m \odot C_n} = 3$ untuk setiap n ganjil, dan $\chi_{S_m \odot C_n} = 4$ untuk setiap n genap, $m \geq 3$, $n \geq 4$, $\{m, n \in N\}$.

Kata kunci: Algoritma Greedy, Graf, Graf Bintang, Graf Lingkaran, Operasi Korona, Pewarnaan Graf.

LATAR BELAKANG

Sebuah graf G terdiri dari suatu himpunan V yang merupakan *vertex-vertex* (simpul – simpul) dan suatu himpunan E dari sisi-sisi sedemikian rupa sehingga setiap sisi dikaitkan dengan pasangan simpul yang tak terurut. Jika terdapat sebuah sisi e yang menghubungkan simpul v dan w , dapat dinyatakan dengan $e = (v, w)$ atau $e = (w, v)$. Dalam konteks ini, (v, w) menyatakan sebuah sisi antara simpul v dan simpul w dalam sebuah graf dan bukan sebuah pasangan terurut.

Dua buah graf dapat dioperasikan dengan berbagai macam operasi, antara lain operasi joint ($G + H$), darab Cartesius ($G \times H$), darab korona ($G \odot H$), darab tensor ($G \otimes H$), komposisi ($G[F]$) dan *Amalgamation*. Pada penelitian ini, operasi graf yang digunakan yaitu operasi korona yang dinotasikan dengan ($G \odot H$). Operasi korona pada dua buah graf G dan H , didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari salinan p -simpul dari graf G dan p salinan H_1, H_2, \dots, H_p dari H , yang kemudian bergabung dengan i -simpul dari G untuk setiap simpul dari H .

Received Juni 30, 2023; Revised Juli 18, 2023; Accepted Agustus 01, 2023

* Shindy Sagita Br Ginting, shindysagita@gmail.com

Pada pembahasan graf, topik yang sering muncul adalah tentang pewarnaan graf. Dalam teori graf, pewarnaan graf merupakan suatu bentuk pelabelan graf, yaitu dengan memberikan warna pada elemen graf yang akan dijadikan subjek dalam memahami constraint permasalahan. Ada tiga macam persoalan pewarnaan graf (*graph colouring*), yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah (*region*).

Bilangan Kromatik dari Graf G adalah jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul (*vertex / V*). [] Bilangan Kromatik yang dinotasikan sebagai $\chi(G)$, adalah bilangan bulat terkecil k sehingga graf G mempunyai pewarnaan titik sejati dengan k -warna. Penerapan bilangan kromatik untuk suatu graf sangat beragam, diantaranya adalah masalah pengaturan jadwal, masalah penempatan bahan kimia dan penempatan barang dari beberapa objek yang berbeda. Untuk melakukan pewarnaan graf, ada beberapa algoritma yang dapat digunakan, seperti Algoritma Welch Powell, Algoritma Genetika, Algoritma Greedy, dan sebagainya.

Penelitian yang berkaitan dengan Operasi Korona antara lain dengan judul “Dimensi Metrik pada Hasil Operasi Korona Dua Buah Graf”. Graf yang digunakan pada penelitian tersebut adalah Graf Lintasan (P_n), Graf Lingkaran (C_m) dan Graf Bintang ($K_{1,m}$). Hasil dari penelitian tersebut adalah nilai Dimensi Metrik dari Graf ($P_n \Theta C_m$) dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 5$ dan Graf ($P_n \Theta K_{1,m}$) dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.

Selanjutnya, penelitian yang berkaitan dengan Operasi Korona dan Bilangan Kromatik antara lain dengan judul “Bilangan Kromatik-Total Hasil Kali Korona Dua Graf”. Hasil dari penelitian tersebut adalah Bilangan Kromatik dari beberapa graf yang telah dioperasikan dengan operasi korona.

KAJIAN TEORITIS

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak diaplikasikan dalam kehidupan nyata, seperti pada penjadwalan, pembuatan peta serta pengaturan lampu lalu lintas. Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* di Eropa, yakni membuktikan kemungkinan melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan tersebut dalam sekali waktu. Euler merepresentasikan masalah tersebut dalam graf dan menyatakan keempat daerah itu sebagai titik, sedangkan ketujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai. Dari percobaan yang ia lakukan, disimpulkan bahwa tidak mungkin bisa melalui setiap jembatan dan kembali lagi ke tempat semula dalam sekali waktu, maka untuk itu jumlah jembatan yang menghubungkan setiap daratan harus genap.

Setelah lebih dari 100 tahun tulisan tersebut tidak mendapatkan perkembangan yang berarti, pada tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824 -1887) berhasil mengembangkan teori pohon yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Kemudian, A. Coyley (1821 – 1895) menggunakan konsep yang sama untuk menjelaskan permasalahan kimia sepuluh tahun kemudian.

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori bergantung pada sudut pandang kelompoknya. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, digolongkan menjadi *graf sederhana* dan *graf tak-sederhana*. Graf tak sederhana terdiri dari 2 jenis yaitu, *graf ganda* dan *graf semu*. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dapat dibedakan menjadi 2 jenis yaitu, *graf tak-berarah* dan *graf berarah*. Selain itu, juga ada *Graf Planar* yaitu graf yang dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisinya yang saling berpotongan.

Graf Bintang merupakan graf bipartisi lengkap yang berbentuk S_n dengan $n \geq 3$. Dimana $V(S_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan titik v_1 disebut sebagai titik pusat dan titik-titik lain yang berhubungan langsung dengan titik pusat disebut sebagai daun. Graf Lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n .

Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua buah graf sebarang. G_1 Korona G_2 ($G_1 \Theta G_2$) adalah graf yang terbentuk dari Graf G_1 dan Graf G_2 dengan Graf G_2 sebanyak order G_1 , dengan cara menghubungkan semua titik di $(G_2)^i$ ke satu titik x_i di G_1 dengan $i = 1, 2, \dots, |G_1|$. Graf hasil operasi korona memiliki banyak himpunan simpul $|V| = |V_1| + |V_1| \cdot |V_2|$ dan banyak anggota himpunan sisi $|E| = |E_1| + |V_1| \times |E_2| + |V_1| \times |V_2|$.

Dalam teori graf, pewarnaan graf merupakan suatu bentuk pelabelan graf, yaitu dengan memberikan warna pada elemen graf yang akan dijadikan subjek dalam memahami constraint permasalahan. Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan simpul adalah pemberian warna pada simpul-simpul di dalam graf sedemikian sehingga setiap dua simpul bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Jumlah warna yang digunakan harus sesedikit mungkin.

Bilangan Kromatik dari Graf G dinyatakan dengan $\chi(G)$ merupakan bilangan k terkecil sehingga Graf G dapat diwarnai dengan k -warna. Warna-warna yang digunakan untuk mewarnai dapat dinyatakan dengan bilangan $1, 2, 3, \dots, k$. Jelas bahwa $\chi(G) \leq |V(G)|$, sedangkan cara mudah untuk mencari batas bawah adalah dengan mencari graf bagian konplit terbesar di G .

Pada pewarnaan graf, terdapat banyak algoritma yang digunakan pada penyelesaiannya. Salah satunya adalah Algoritma Greedy. Algoritma Greedy ini berarti memberikan warna untuk beberapa cacah derajat simpul berurutan dimulai dari derajat terbesar untuk memperoleh cacah pewarnaan paling minimum. Dalam algoritma ini simpul-simpul dari graf yang akan diwarnai diurutkan terlebih dahulu menurut aturan tertentu.

METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan di Digital Library Universitas Negeri Medan yang memiliki beberapa buku yang berkaitan dengan graf dan operasi korona. Waktu penelitian kurang lebih dua bulan. Metode penelitian yang digunakan pada penulisan penelitian ini adalah riset kepustakaan. Informasi yang diperlukan dalam penelitian ini didapatkan dari buku referensi, jurnal, maupun dokumen-dokumen lain yang berkaitan dengan topik pembahasan. Adapun prosedur pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengumpulkan teori-teori pendukung mengenai materi yang dibahas dalam penelitian.
2. Menggambarkan Graf Lingkaran (C_n) dan Graf Bintang (S_m).
3. Mengoperasikan Graf Bintang (S_m) dan Graf Lingkaran (C_n) dengan operasi korona.
4. Mewarnai setiap titik pada graf yang dihasilkan dengan pewarnaan graf.
5. Menemukan bilangan kromatik dari graf yang dihasilkan dan kemudian mendefenisikannya.
6. Membuktikan pola yang terbentuk.
7. Menarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik dari graf hasil operasi korona pada graf bintang dan graf lingkaran dan kemudian membuktikan pola yang telah terbentuk. Graf Bintang yang digunakan mulai dari S_3 sampai S_6 dan Graf Lingkaran yang digunakan adalah C_3 dan C_4 . Operasi graf yang digunakan adalah operasi korona. Graf Bintang dioperasikan dengan Operasi Korona terhadap Graf Lingkaran. Kemudian, graf yang dihasilkan diwarnai dengan menggunakan Algoritma Greedy yaitu, dengan mengurutkan vertex dengan jumlah derajat tertinggi dan kemudian ditentukan bilangan kromatik dari pewarnaan graf tersebut. Langkah tersebut terus diulangi hingga ditemukan pola yang terbentuk.

Berdasarkan hasil operasi korona dari graf bintang dan graf lingkaran, maka pola yang terbentuk yaitu :

No.	$C_n \odot S_m$	$\chi C_n \odot S_m$
1.	$C_3 \odot S_3$	3
2.	$C_3 \odot S_4$	3
3.	$C_3 \odot S_5$	3
4.	$C_3 \odot S_6$	3
5.	$C_4 \odot S_3$	3
6.	$C_4 \odot S_4$	3
7.	$C_4 \odot S_5$	3
8.	$C_4 \odot S_6$	3

Dari hasil penelitian diatas, dapat ditemukan bahwa $\chi C_n \odot S_m = 3$ untuk $\{m, n \geq 3\}$. Akan dibuktikan jika $m, n < 3$ maka $\chi C_n \odot S_m \neq 3$. Graf Bintang memiliki jumlah simpul terkecil sebanyak 3. Maka, jika nilai $m < 3$ tidak dapat dilakukan operasi korona antara Graf Bintang dan Graf Lingkaran. Jadi, jika $m, n < 3$ maka $\chi C_n \odot S_m \neq 3$ terbukti.

Operasi Korona **tidak bersifat komutatif**. Maka akan dilakukan operasi korona dari Graf Lingkaran terhadap Graf Bintang. Graf Lingkaran yang digunakan adalah Graf C_3 sampai Graf C_6 dan Graf Bintang yang digunakan adalah Graf S_3 dan Graf S_4 . Adapun hasil bilangan kromatik yang diperoleh dari kedua graf yang telag dioperasikan dengan operasi korona adalah sebagai berikut.

No.	$S_m \odot C_n$	$\chi S_m \odot C_n$
1.	$S_3 \odot C_3$	4
2.	$S_3 \odot C_4$	3
3.	$S_3 \odot C_5$	4
4.	$S_3 \odot C_6$	3
5.	$S_4 \odot C_3$	4
6.	$S_4 \odot C_4$	3
7.	$S_4 \odot C_5$	4
8.	$S_4 \odot C_6$	3

Dari hasil penelitian diatas, diperoleh :

1. $\chi S_m \odot C_n = 4$ untuk setiap n ganjil, $m, n \geq 3$
2. $\chi S_m \odot C_n = 3$ untuk setiap n genap, $m \geq 3, n \geq 4$

Akan dibuktikan jika $\chi S_m \odot C_n \neq 4$ untuk setiap n tidak ganjil, $m, n \geq 3$ dan $\chi S_m \odot C_n \neq 3$ untuk setiap n tidak genap, $m \geq 3, n \geq 4$.

- a. Untuk n tidak ganjil

Nilai $\chi S_m = 2$. Misalkana $C = s_1, s_2$ merupakan himpunan warna untuk graf S_m .

Selanjutnya m copy graf C_n dimana n tidak ganjil dapat diwarnai dengan 2 warna.

Karena setiap simpul dari m copy graf C_n terhubung dengan salah satu titik di S_m , maka 1 warna dari C dapat digunakan untuk mewarnai titik di C_n . Sebuah titik harus

diwarnai dengan warna ketiga, yaitu s_3 . Jadi, $\chi_{S_m} \Theta C_n \neq 4$ untuk setiap n tidak ganjil, $m, n \geq 3$ terbukti.

b. Untuk n tidak genap

Nilai $\chi_{S_m} = 2$. Misalkan $C = s_1, s_2$ merupakan himpunan warna untuk graf S_m . Selanjutnya m copy graf C_n dimana n tidak genap dapat diwarnai dengan 3 warna. Karena setiap simpul dari m copy graf C_n terhubung dengan salah satu titik di S_m , maka 1 warna dari C dapat digunakan untuk mewarnai titik di C_n . Dua buah titik harus diwarnai dengan warna ketiga dan warna keempat, yaitu s_3 dan s_4 . Jadi, $\chi_{S_m} \Theta C_n \neq 3$ untuk setiap n tidak genap, $m \geq 3, n \geq 4$ terbukti.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian hasil dan pembahasan diatas, diperoleh kesimpulan bahwa $\chi_{C_n} \Theta S_m = 3$ untuk $m, n \geq 3$. Karena operasi korona bersifat **tidak komutatif**, maka dilakukan juga penelitian dengan hasil $\chi_{S_m} \Theta C_n = 4$ untuk setiap n ganjil, $m, n \geq 3$ dan $\chi_{S_m} \Theta C_n = 3$ untuk setiap n genap, $m \geq 3, n \geq 4$.

Penelitian ini membahas mengenai operasi korona pada Graf Bintang dan Graf Lingkaran. Penelitian ini dapat dikembangkan lagi dengan mengubah dan/atau menambah operasi atau jenis graf yang akan digunakan. Selain itu, juga dapat dilakukan pewarnaan graf dengan menggunakan algoritma yang berbeda.

DAFTAR REFERENSI

- Apriyanto (2018). Pewarnaan Graph Berbasis Algoritma Welch Powell dalam Pengaturan Jadwal Praktikum. *Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika*, 1(2), 11-21.
- Astuti, S. (2011). Penyusunan Jadwal Ujian Mata Kuliah dengan Algoritma Pewarnaan Graf Welch Powel. *Jurnal Dian*, 68 – 74
- Barathi, S., N., (2017) A Study on Graph Coloring, *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 8(5), 20 – 30
- Ellania, S. (2020). Bilangan Kromatik-Total Hasil Kali Korona Dua Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 8(1), 17-24
- Fatimah, S., dkk. (2016). Pelabelan L(2,1) pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 13(2), 73 – 84
- Heny, C., dan Dwi, M. (2014). Aplikasi Pewarnaan Graf untuk Optimalisasi Pengaturan Traffic Light di Sukoharjo. *Jurnal IPTEK*, 7(1), 25 – 34.
- Maya, S. (2017). Dimensi Metrik pada Hasil Operasi Korona Dua Buah Graf. *Jurnal Buana Matematika*, 7(2), 93 – 98
- Saif, N., (2015). Penerapan Greedy Coloring Algorithm pada Peta Kotamadya Berbasis Four-Colour Theorem, *Kaunia*, XI(1), 1-13

- Vasudev, C. (2006). *Graph Theory with Application*. New Age International (P) Ltd, Karanataka
- Welyyanti, D. (2018). Beberapa Syarat Cukup untuk Bilangan Kromatik Lokasi hingga pada Graf tak Terhubung. *Eksakta*, 19(1), 76-82