



Dekomposisi Transformasi Wavelet Kontinu dengan Filter Wavelet Morlet

Haabijasa Luckmanoor Adzakie

Universitas Sebelas Maret

haabijasa1@student.uns.ac.id

Dewi Retno Sari Saputro

Universitas Sebelas Maret

dewiretnoss@staff.uns.ac.id

Sutanto

Universitas Sebelas Maret

sutanto@staff.uns.ac.id

Purnami Widyaningsih

Universitas Sebelas Maret

purnami_w@staff.uns.ac.id

Nurul Khomariah

Universitas Sebelas Maret

nurulkhomariah@staff.uns.ac.id

Abstract

Analyzing high-dimensional data often presents unique challenges, necessitating dimension reduction methods, one of which is the wavelet approach. Wavelets function as a transformation that automatically separates data into several components, then analyzes each component based on a resolution appropriate to its time scale. The Continuous Wavelet Transform (CWT) is a dimension reduction technique that relies on multiresolution decomposition to address modeling problems by generating local signal representations in the time and frequency domains (scales) continuously. Through multiresolution decomposition, trends in time series data can be separated. This transformation enables the transfer of data from the original domain into the wavelet domain for further analysis, as well as facilitating the separation of signals at both low and high frequencies more accurately. This study revisits the use of CWT, which divides data into various scales or frequency components and analyzes each part with the appropriate resolution. In this context, the Morlet wavelet filter is used. The results of the study indicate that the Morlet wavelet in CWT has advantages in detecting transient frequency components and local oscillation phenomena, making it highly effective in analyzing complex signal.

Keywords: decomposition, multi-resolution, wavelet transformation, Morlet wavelet

Abstrak

Analisis terhadap data berdimensi tinggi sering kali menghadapi tantangan tersendiri, sehingga diperlukan metode reduksi dimensi, salah satunya dengan pendekatan wavelet. Wavelet berfungsi sebagai transformasi yang secara otomatis memisahkan data menjadi beberapa komponen, lalu menganalisis masing-masing komponen berdasarkan resolusi yang sesuai dengan skala waktunya. Transformasi Wavelet Kontinu (TWK) merupakan salah satu teknik reduksi dimensi yang mengandalkan dekomposisi multiresolusi, untuk menyelesaikan permasalahan pemodelan dengan menghasilkan representasi sinyal secara lokal di domain waktu dan frekuensi (skala) secara kontinu. Melalui dekomposisi multiresolusi, tren dalam data deret waktu dapat dipisahkan. Transformasi ini memungkinkan pengalihan data dari domain asli ke dalam domain wavelet untuk dianalisis lebih lanjut, serta memfasilitasi pemisahan sinyal baik pada frekuensi rendah maupun tinggi secara lebih akurat. Penelitian ini mengkaji kembali penggunaan TWK, yang membagi data ke dalam berbagai skala atau komponen frekuensi, dan menganalisis masing-masing bagian dengan resolusi yang sesuai. Dalam konteks ini, filter wavelet Morlet digunakan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Morlet wavelet dalam CWT memiliki keunggulan dalam mendeteksi komponen frekuensi transien dan fenomena osilasi lokal, sehingga sangat efektif dalam menganalisis sinyal yang kompleks.

Kata kunci: dekomposisi, multiresolusi, transformasi wavelet, wavelet Morlet

(*) Corresponding Author: haabijasa1@student.uns.ac.id



PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, ada berbagai tipe sinyal yang dapat kita temui, seperti suara, getaran, atau data medis yang terus berubah seiring waktu. Misalnya, detak jantung atau gelombang otak yang tidak selalu stabil dan memiliki pola yang berubah-ubah. Untuk memahami dan menganalisis sinyal seperti ini, diperlukan alat yang dapat melihat bagaimana sinyal berubah dalam waktu sekaligus mengenali frekuensi atau 'warna' sinyal tersebut.

Transformasi wavelet kontinu (TWK)) merupakan metode analisis sinyal yang sangat efektif untuk mengkaji sinyal non-stasioner pada saat frekuensi dan waktu bervariasi secara dinamis. Berbeda dengan transformasi Fourier yang hanya memberikan informasi frekuensi global, TWK memungkinkan pemetaan sinyal dalam domain waktu-frekuensi, sehingga menghasilkan representasi spektrum waktu-frekuensi yang lebih rinci.

Metode analisis sinyal yang paling populer, yaitu Transformasi Fourier, memang sangat baik dalam melihat frekuensi sinyal, namun tidak dapat memberikan informasi kapan frekuensi tertentu muncul karena hanya melihat secara keseluruhan waktu. Dengan demikian, jika sinyal berubah-ubah, informasi waktu akan hilang (Mallat, 1999). Dalam hal ini, transformasi wavelet dapat menjadi solusi. TWK memungkinkan untuk 'mengupas' sinyal secara lebih detail, baik dari sisi waktu maupun frekuensi secara bersamaan. Dengan demikian dapat dilihat bagaimana komponen frekuensi sinyal muncul dan hilang seiring waktu (Torrence & Compo, 1998).

Salah satu jenis wavelet yang sering digunakan adalah wavelet Morlet. Wavelet ini seperti gelombang sinus yang dibungkus dengan 'selimut' berbentuk lonceng (kurva Gaussian) sehingga ia bisa fokus pada bagian-bagian tertentu dari sinyal dengan sangat baik. Wavelet Morlet sangat berguna untuk menemukan pola tersembunyi dalam sinyal yang kompleks, misalnya dalam sinyal jantung atau gempa bumi (Addison, 2017). Wavelet Morlet memiliki keunggulan karena memberikan kompromi yang baik antara resolusi waktu dan frekuensi, serta sangat cocok untuk mendeteksi komponen osilasi pada sinyal.

Wavelet berasal dari bahasa Perancis, ondelette yang memiliki arti "gelombang kecil". Dalam pemodelan matematika, istilah wavelet memiliki definisi fungsi dasar yang memiliki kemampuan untuk merekonstruksi sinyal. Sinyal dapat dibangun kembali dalam bentuk fungsi sinus dan cosinus dengan menggunakan deret Fourier. Menurut Ogden (1997), pendekatan menggunakan deret Fourier kurang efektif dalam merekonstruksi sinyal yang tidak mulus, seperti sinyal dengan lonjakan tajam atau sudut runcing. Berbeda dengan Fourier, wavelet mampu membangun kembali berbagai jenis sinyal, baik yang halus maupun yang memiliki ketidakteraturan, dengan lebih akurat melalui fungsi dasarnya.

Metode wavelet menawarkan sejumlah keunggulan dibandingkan teknik lainnya. Keunggulan pertama adalah sifatnya yang terlokalisasi dalam domain waktu, sehingga efektif digunakan untuk membentuk berbagai tipe fungsi, termasuk yang berubah-ubah seiring waktu, memiliki fluktuasi tinggi, atau bersifat tidak halus. Keunggulan kedua, wavelet mampu memisahkan komponen-komponen dalam fungsi multiresolusi, memungkinkan analisis pada berbagai tingkat detail berdasarkan skala dan ciri khasnya masing-masing. Keunggulan ketiga terletak pada kemampuannya dalam mereduksi energi sinyal melalui pendekatan wavelet. Salah satu implementasi nyata adalah dalam proses kompresi data, yang juga bermanfaat dalam aktivitas klasifikasi maupun estimasi statistik nonparametrik (Bruce & Gao, 1996).

Analisis waktu-frekuensi sering digunakan yakni wavelet Morlet. Ini terutama berlaku untuk sinyal yang tidak stasioner, atau tidak tetap dalam waktu. Bentuk wavelet Morlet mirip dengan gelombang sinus Gaussian yang di-window-kan. Parameter utama wavelet Morlet adalah lebar Gaussian, yang mengontrol trade-off antara resolusi waktu dan resolusi frekuensi. Penelitian ini menerapkan dekomposisi menggunakan transformasi wavelet kontinu (TWK) dengan

memanfaatkan filter Morlet, kemudian menganalisis setiap komponennya berdasarkan resolusi yang disesuaikan dengan lebar fungsi Gaussian.

METODE

Penelitian ini bersifat teoritis, dengan pendekatan utama berupa kajian terhadap berbagai literatur yang membahas topik-topik seperti fungsi wavelet, transformasi wavelet, analisis multiresolusi, dekomposisi transformasi wavelet kontinu, serta keluarga wavelet Morlet. Proses penelitian terbagi ke dalam tiga tahapan: pertama, melakukan kajian teoritis terhadap konsep-konsep yang relevan; kedua, mengevaluasi hasil kajian untuk memahami karakteristik fungsi wavelet, analisis multiresolusi, transformasi wavelet kontinu, dan wavelet Morlet; dan ketiga, melakukan analisis mendalam yang diakhiri dengan penarikan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

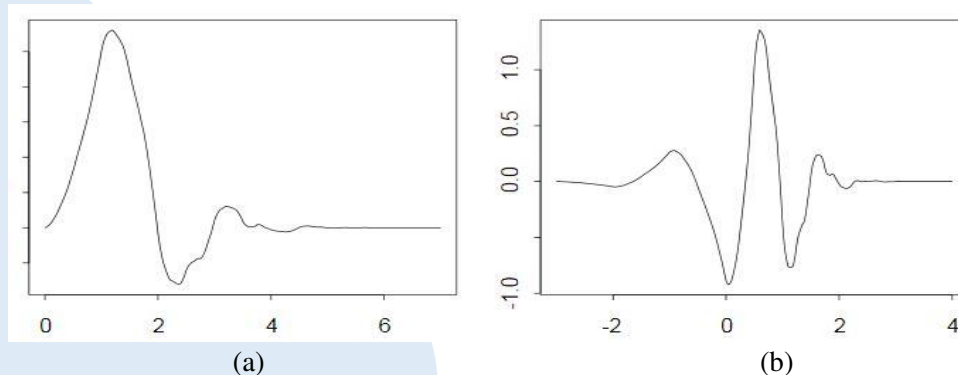
Penelitian ini membahas kajian teoritis mengenai fungsi wavelet, transformasi wavelet, transformasi wavelet kontinu, serta wavelet coherence. Penjelasan lebih rinci dijabarkan dalam submateri berikut.

Fungsi Wavelet

Wavelet merupakan fungsi dasar yang memiliki peran penting, serupa dengan fungsi trigonometri seperti sinus dan cosinus. Berbeda dengan fungsi trigonometri yang periodik, wavelet memiliki karakteristik osilasi yang terpusat di sekitar nol dan bersifat lebih lokal, baik dalam dimensi waktu maupun ruang. Wavelet terdiri atas dua jenis, yaitu *mother wavelet* $\psi(t)$ yang merupakan fungsi wavelet dan *father wavelet* $\phi(t)$ sebagai fungsi skala (Lin, 2013).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (1)$$

Grafik fungsi *father* dan *mother wavelet* ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. (a) *father wavelet* dan (b) *mother wavelet*

Dalam penelitian ini, digunakan *wavelet coherence* dengan spesifikasi Morlet yang ditulis sebagai

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right), \psi(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2)$$

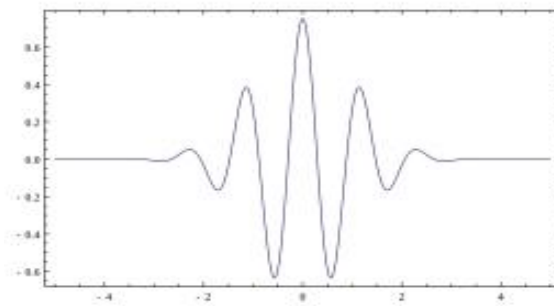
$L^2(\mathbb{R})$ dalam analisis wavelet merujuk pada ruang fungsi-fungsi yang memiliki integral kuadrat terbatas di seluruh bilangan riil. Fungsi-fungsi tersebut harus memenuhi syarat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$. Ruang $L^2(\mathbb{R})$ adalah ruang fungsi yang paling umum digunakan dalam analisis *wavelet*, karena banyak fungsi yang digunakan dalam analisis wavelet termasuk dalam ruang ini. Dengan $\frac{1}{\sqrt{s}}$ merupakan faktor normalisasi, dengan variansi dari *wavelet* yaitu:

$$||\psi_{u,s}(t)||^2 = 1$$

dengan u merupakan parameter lokasi untuk memberikan posisi *wavelet* dengan tepat, dan s merupakan parameter dilatasi untuk mendefinisikan bagaimana *wavelet* dilatasi, sehingga Morlet *wavelet* dapat didefinisikan dengan

$$\psi^M(t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3)$$

dengan ω_0 merupakan frekuensi pusat dari *wavelet* yang bernilai 6 [Grinsted *et al.* (2004), Rua dan Nunes (2009), Vacha dan Barunik (2012), Wu *et al.* (2020)].



Gambar 2. Grafik Wavelet Morlet

- a. Nilai integral dari $\psi(\cdot)$ sama dengan nol:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) du = 0$$

- b. Nilai integral dari $\psi(\cdot)$ kuadrat sama dengan satu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2 du = 1$$

Fungsi *father wavelet* ($\emptyset$) digunakan untuk merepresentasikan komponen sinyal yang halus dan berfrekuensi rendah, sedangkan *mother wavelet* (ψ) lebih sesuai untuk menggambarkan detail sinyal yang berfrekuensi tinggi. Keduanya merupakan bagian dari satu keluarga wavelet yang saling melengkapi dalam proses analisis sinyal.

Transformasi Wavelet

Transformasi sinyal merupakan cara alternatif untuk merepresentasikan sinyal tanpa mengubah informasi di dalamnya. Selain itu, metode ini juga bermanfaat dalam proses kompresi

data. Dalam pengembangannya, transformasi wavelet terbagi menjadi dua jenis, yaitu *discrete wavelet transform (DWT)* dan *continuous wavelet transform (CWT)*. Keduanya menggunakan fungsi-fungsi yang berasal dari *mother wavelet*, yang diperoleh melalui proses translasi dan penskalaan. Pada penskalaan dan fungsi *wavelet*, sinyal atau fungsi dapat diperluas dalam bentuk

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \phi_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_j(t) \psi_{j,k}(t)$$

dengan fungsi skala dan koefisien *wavelet* $c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k^*(t) f(t) dt$ dan $d_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}^*(t) f(t) dt$.

Karena terdapat dua jenis wavelet yang digunakan untuk merekonstruksi suatu fungsi, maka dalam DWT digunakan dua jenis filter utama, yaitu filter *mother wavelet* dan filter *father wavelet*. Umumnya, *mother wavelet* dilambangkan dengan huruf *h*, sedangkan *father wavelet* dilambangkan dengan huruf *g*. Nilai filter memiliki beberapa sifat berikut.

- Panjang filter genap,
- $\sum_{i=0}^{L-1} h_i^2 = 1$ dan $\sum_{i=0}^{L-1} g_i^2 = 1$ dengan *L* panjang filter,
- $\sum_{i=0}^{L-1} h_i g_i = 0$, dan
- $g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l}$.

Transformasi Wavelet Kontinu

Menurut Farge (1992), ada dua tipe transformasi *wavelet*, yaitu transformasi *wavelet* diskrit dan transformasi *wavelet* kontinu. Berdasarkan Rua dan Nunes (2009), fungsi transformasi *wavelet* kontinu pada sinyal $x(t)$ ditulis sebagai

$$W_s(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \frac{t-u}{s} dt \quad (4)$$

dengan W_s merupakan transformasi *wavelet* kontinu dari data x_t pada domain skala *u* dan translasi waktu *s*, *u* merupakan skala transformasi *wavelet* dan *s* merupakan dilatasi waktu lokal pada transformasi *wavelet*. Data inflasi di Indonesia $x(t)$ merupakan data kontinu berupa gelombang yang akan ditransformasikan. Kelebihan utama dari transformasi *wavelet* kontinu yaitu kemampuan untuk menguraikan dan mengonstruksikan ulang fungsi $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ menjadi

$$x(t) = \frac{1}{C_\phi} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty W_x(u, s) \psi_{u,s}(t) du \right] \frac{ds}{s^2}, s > 0 \quad (5)$$

Wavelet Morlet

Salah satu wavelet yang paling sering digunakan dalam TWK yakni Wavelet Morlet, yang berbentuk sebagai gelombang sinus kompleks yang dimodulasi dengan fungsi Gaussian:

$$\psi(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

dengan

ω_0 : frekuensi pusat (biasanya ≥ 5 agar memenuhi syarat Wavelet) 5

t : waktu

i : imajiner

$e^{i\omega_0 t}$ merupakan komponen gelombang sinus yang menentukan frekuensi dan fase. ω_0 menentukan frekuensi gelombang, dan $i\omega_0 t$ menentukan fasenya

$e^{-\frac{t^2}{2}}$ merupakan komponen Gaussian, yang membentuk "jendela" atau amplop yang membatasi sinyal wavelet.

Wavelet ini menggabungkan osilasi frekuensi tertentu (komponen sinusoidal) dengan peluruhan eksponensial berbasis Gaussian, menjadikannya ideal untuk mengamati perubahan lokal dalam frekuensi (Cohen, 2014). Wavelet Morlet memberikan keseimbangan antara resolusi temporal dan frekuensi, meskipun tidak bersifat ortogonal, sehingga lebih cocok digunakan dalam Continuous Wavelet Transform (CWT) daripada Discrete Wavelet Transform (DWT) (Torrence & Compo, 1998).

Morlet ideal untuk mendeteksi osilasi periodik dan transien dalam sinyal karena sifatnya yang kompleks—mampu merepresentasikan amplitudo dan fase sinyal secara simultan. Hal ini penting dalam aplikasi seperti analisis neurofisiologi, geofisika, dan klimatologi (Addison, 2017; Torrence & Compo, 1998).

Wavelet Morlet adalah fungsi wavelet yang berbentuk seperti gelombang sinus yang dimodulasi oleh jendela Gaussian. Fungsi $C_J(t) = \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k}(t)$ dan $D_J(t) = \sum_k d_{J,k} \psi_{J,k}(t)$ masing-masing disebut sebagai sinyal halus dan sinyal detail. Pendekatan deret *wavelet* ortogonal dalam sinyal kontinu $f(t)$ dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$f(t) = C_J(t) + D_J(t) + D_{J-1}(t) + \dots + D_1(t).$$

Pendekatan berupa penjumlahan dalam fungsi tersebut merepresentasikan proses dekomposisi sinyal menjadi komponen-komponen ortogonal $C_J(t), D_J(t), D_{J-1}(t), \dots, D_1(t)$ pada berbagai skala yang berbeda, karena fungsi pada setiap skala menggambarkan bagian sinyal pada tingkat resolusi yang berbeda. Metode ini dikenal sebagai dekomposisi multiresolusi. Dalam analisis sinyal menggunakan wavelet, terdapat tiga aspek penting yang perlu diperhatikan, yaitu jumlah level multiresolusi, jenis keluarga wavelet yang digunakan, serta aturan batas yang diterapkan untuk meningkatkan akurasi hasil.

Jumlah level multiresolusi dalam analisis *wavelet* bisa mencapai hingga n level, dengan level maksimum tergantung pada jumlah data, batas yang digunakan, dan jenis *wavelet* (di mana jumlah koefisien pada level sinyal yang tidak halus setidaknya setengah dari panjang filter *wavelet*). Tidak ada cara cepat yang pasti untuk memilih *wavelet* yang tepat dalam analisis. Pemilihan *wavelet* biasanya didasarkan pada karakteristik sinyal yang dianalisis. Beberapa faktor perlu dipertimbangkan dalam memilih *wavelet* yang paling sesuai, namun dua faktor utama adalah fungsi pemulusan (*smoothing function*) dan lokalisasi spasial *wavelet* tersebut. Secara umum, *wavelet* dengan *support* yang lebih luas cenderung lebih halus, tetapi kurang terlokalisasi. Selain itu, ada tujuh jenis aturan yang digunakan untuk menentukan batas *wavelet*, yaitu: periodik, refleksi, nol, *poly0*, *poly1*, *poly2*, interval, dan tak berhingga. Standar dalam menentukan aturan batasan yang digunakan dalam *wavelet* yaitu

- periodik, untuk ukuran sampel dapat habis dibagi 2^J dimana J merupakan jumlah level maksimal,
- nol, jika jumlah sampel tidak habis dibagi 2^J ketika menggunakan *wavelet* ortogonal,
- refleksi, jika jumlah sampel tidak habis dibagi 2^J ketika menggunakan *wavelet* biortogonal.

Penggunaan aturan periodik dan refleksi dikenal sebagai metode tercepat dan paling stabil secara numerik dalam melakukan transformasi maupun transformasi invers.

Wavelet Coherence



Dalam analisis *Fourier*, penting untuk menghaluskan *cross spectrum* sebelum menghitung koherensinya (Torrence dan Webster, 1999). Pada penelitian terdahulu, masih belum jelas cara menghaluskan *cross-wavelet spectrum* untuk mendefinisikan koherensi *wavelet* yang tepat (Liu, 1994). *Wavelet coherence* didefinisikan menggunakan *smoothing* dalam skala maupun waktu, dengan jumlah *smoothing* bergantung pada *wavelet* yang digunakan dan skalanya. Diberikan dua *time series* X dan Y , dengan transformasi *wavelet* $W^X(s)$ dan $W^Y(s)$, dengan n merupakan indeks waktu dan s merupakan skala, *cross-wavelet spectrum* ditulis sebagai berikut:

$$W_n^{XY}(s) = W_n^X(s)W_n^{Y*}(s) \quad (6)$$

dengan u merupakan posisi, s sebagai skala, dan $(*)$ mengindikasikan konjugasi kompleks. Berdasarkan Torrence dan Webster (1999), *wavelet coherence* didefinisikan sebagai nilai mutlak kuadrat dari *smoothed cross-wavelet spectrum* yang dinormalisasikan dengan *smoothed wavelet power spectrum*. Koefisien *wavelet* kuadrat ditulis sebagai

$$R^2(x, y) = \frac{|S(s^{-1}W_{xy}(u, s))|^2}{S(s^{-1}|W_x(u, s)|^2)S(s^{-1}|W_y(u, s)|^2)} \quad (7)$$

dengan S merupakan parameter *smoothing*, yang menyeimbangkan resolusi dan signifikansi. Istilah "*coherence*" mengindikasikan koefisien koherensi memenuhi pertidaksamaan $0 \leq R^2(x, y) \leq 1$. Nilai yang mendekati 0 menandakan korelasi lemah, sedangkan nilai yang mendekati 1 menandakan korelasi yang kuat (Wu *et al.*, 2020)

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dijabarkan, dapat disimpulkan bahwa terdapat tiga aspek utama dalam analisis sinyal multiresolusi menggunakan metode TWK dengan filter Morlet. Ketiga aspek tersebut meliputi penentuan jumlah level multiresolusi, pemilihan jenis *wavelet* yang digunakan, serta penetapan aturan batas. Transformasi *wavelet* memungkinkan pemisahan sinyal pada frekuensi tinggi maupun rendah dengan tingkat ketelitian yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

- Addison, P. S. (2017). *The illustrated wavelet transform handbook: Introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781003040408>
- Bruce, A. G., & Gao, H.-Y. (1996). *Applied wavelet analysis with S-PLUS: With 192 illustrations*. Springer-Verlag.
- Caraka, R. E. (2016). Threshold (DWT) wavelet decomposition object. Diambil dari ResearchGate.
- Cohen, M. X. (2014). *Analyzing neural time series data: Theory and practice*. MIT Press.
- Farge, M. (1992). Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 24, 395–458.
- Grinsted, A., Moore, J. C., & Jevrejeva, S. (2004). Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 11, 561–566. <https://doi.org/10.5194/npg-11-561-2004>





- Hayati, R., & Kurnia, R. (2014). Simulasi unjuk kerja discrete wavelet transform (DWT) dan discrete cosine transform (DCT) untuk pengolahan sinyal radar di daerah yang ber-noise tinggi. *Jurnal NTE FT Unand*.
- Kuşkaya, S., Toğuş, N., & Bilgili, F. (2022). Wavelet coherence analysis and exchange rate movements. *Quality & Quantity*, 56(6), 4675–4692.
- Kusumaningrum, D. A., Suparti, & Maruddani, D. A. I. (2017). Analisis data runtun waktu menggunakan metode wavelet thresholding dengan maximal overlap discrete transform. *Jurnal Gaussian*, ..., 151–159.
- Lin, H.-Y. (2013). *An introduction to wavelets*. Citeseer.
- Liu, P. C. (1994). Wavelet spectrum analysis and ocean wind waves wavelet analysis and its applications (Vol. 4, pp. 151–166). Elsevier.
- Mallat, S. G. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), 674–693.
- Modi, K. J., Nanavati, S. P., Phadke, A. S., & Panigrahi, P. K. (2014). Wavelet transform: Application to data analysis-I. *General Article*, 10–22.
- Ogden, R. T. (1997). *Essential wavelets for statistical applications and data analysis*. Birkhäuser.
- Rapp, S., Martin, U., Strähle, M., & Scheffbuch, M. (2019). Track-vehicle scale model for evaluating local truck defects detection methods. *Transportation Geotechnics*, 19, 9–18.
- Ratna, D., & Khukmiati, H. (2004). Penerapan transformasi wavelet diskrit untuk reduksi noise pada citra digital. *Journal of Mathematics and Its Applications*, 49, ...–57.
- Rua, A., & Nunes, L. C. (2009). International comovement of stock market returns: A wavelet analysis. *Journal of Empirical Finance*, 16(4), 632–639.
- Suparti. (2005). Perbandingan estimator regresi nonparametrik menggunakan metode Fourier dan metode wavelet. *UNDIP: Jurnal Matematika*.
- Suyanto. (2019). *Data mining untuk klasifikasi dan klusterisasi data*. Informatika Bandung.
- Torrence, C., & Compo, G. P. (1998). A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1), 61–78. [https://doi.org/10.1175/1520-0477\(1998\)079](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079)
- Torrence, C., & Webster, P. J. (1999). Interdecadal changes in the ENSO-monsoon system. *Journal of Climate*, 12(8), 2679–2690. [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(1999\)012](https://doi.org/10.1175/1520-0442(1999)012)
- Yang, L., Cai, X. J., Zhang, H., & Hamori, S. (2016). Interdependence of foreign exchange markets: A wavelet coherence analysis. *Economic Modelling*, 55, 6–14.
- Yasin, H. (2009). Estimasi regresi nonparametrik dengan metode wavelet shrinkage neural network pada model rancangan tetap. (1–10). Diakses via ResearchGate.
- Vacha, L., & Barunik, J. (2012). Co-movement of energy commodities revisited: Evidence from wavelet coherence analysis. *Energy Economics*, 34(1), 241–247.
- Wu, K., Zhu, J., Xu, M., & Yang, L. (2020). Can crude oil drive the co-movement in the international stock market? Evidence from partial wavelet coherence analysis. *The North American Journal of Economics and Finance*, 53, 101194

